

Gravitationskollaps einer Staubwolke

Hendrik van Hees

27. Mai 2015

1 Einleitung und Konventionen

In dieser Vorlesung betrachten wir die Frage, wie der Gravitationskollaps einer radialsymmetrischen Staubwolke in der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben werden kann. Wir folgen dabei der Darstellung in [LL92, Wei72].

Wir verwenden die folgenden Konventionen hinsichtlich der Vorzeichen diverser Tensoren: Die Signatur der **Metrik** ist $(+, -, -, -)$ („Westküstenkonvention“), d.h. in der speziellen Relativitätstheorie ist die Metrik der Minkowski-Raumzeit durch $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ gegeben.

Die **Christoffel-Symbole**, die den **affinen Zusammenhang** der Raumzeit definieren, sind entsprechend einer Riemannschen torsionsfreien Mannigfaltigkeit durch

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}(g^{\rho\sigma} \partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (1)$$

gegeben, wobei die **Einsteinsche Summationskonvention** gilt, d.h. es wird über gleichlautende Indizes summiert. Dabei muß stets einer der Indizes unten (kovarianter Index) und der andere oben (kontravarianter Index) stehen.

Der **Riemannsche Krümmungstensor** ist vermöge der Christoffel-Symbole durch

$$R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma} = \partial_{\gamma} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \partial_{\beta} \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\gamma}^{\nu} \quad (2)$$

definiert. Durch Kontraktion ergibt sich daraus der **Ricci-Tensor**

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}. \quad (3)$$

Eine weitere Kontraktion liefert schließlich den **Ricci-Skalar**

$$\mathcal{R} = R^{\mu}{}_{\mu}. \quad (4)$$

Die **Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation** lauten dann

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{\mathcal{R}}{2} g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (5)$$

wobei $T_{\mu\nu}$ den symmetrischen Energie-Impulstensor der Materie und $\kappa = 8\pi G$ (wir verwenden natürliche Einheiten für die die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist) die Einsteinsche und G die Newtonsche Gravitationskonstante bezeichnen.

Bildet man die Spur von (5), sieht man, daß die Einstein-Gleichungen auch in der Form

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^\rho{}_\rho g_{\mu\nu} \right) \quad (6)$$

geschrieben werden können.

Schließlich bemerken wir noch, daß die sog. **Bianchi-Identität**

$$D^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (7)$$

gilt, d.h. unabhängig von den Bewegungsgleichungen für die Materie, die den Energie-Impuls-Tensor bestimmen, muß

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (8)$$

gelten. Dabei ist D^μ die kovariante Ableitung.

2 Radialsymmetrische Normalkoordinaten und die Vakuum-Lösung

Wie auf Übungsblatt 1 gezeigt¹, kann man die allgemeinst mögliche radialsymmetrische Metrik stets auf die Form

$$ds = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu = B(r, t) dt^2 - A(r, t) dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9)$$

bringen. Für $B(r, t) > 0$ und $A(r, t) > 0$ ist für einen Beobachter, der bzgl. dieser Koordinaten $(q^\mu) = (t, r, \vartheta, \varphi)$ ruht, die Hyperfläche $t = \text{const}$ sein „Raum“, und für die Spähre $r = \text{const}$ ist r der Radius der Kugelschale in dem Sinne, daß ihr Flächenelement $d\vartheta d\varphi r^2 \sin \vartheta$ und folglich ihr gesamter Flächeninhalt $4\pi r^2$ ist, wie in der Euklidischen Geometrie.

Die eindeutigen **radialsymmetrischen Vakuumlösungen** (also radialsymmetrische Lösungen in einem Raumzeit-Gebiet, in dem $T_{\mu\nu} \equiv 0$ gilt), der Einsteinschen Feldgleichungen ist die **Schwarzschild-Lösung**

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (10)$$

Sie ist folglich notwendig **statisch**. Dies ist das **Birkhoff'sche Theorem**. Dies ist analog zur Situation in der klassischen Elektrodynamik, wo auch die allgemeinst mögliche radialsymmetrische Lösung der Maxwell-Gleichung für den leeren Raum (verschwindende Ladungs- und Stromdichten) ebenfalls die statische Coulomb-Lösung ist. Dies hängt damit zusammen, daß das elektromagnetische Feld ein (masseloses) Spin-1- und das Gravitationsfeld ein (masseloses) Spin-2-Feld sind.

Der Vergleich von (10) mit dem Newtonschen Limes zeigt, daß die hier gewählten Koordinaten „Normalkoordinaten“ in dem Sinne sind, daß der Newtonsche Limes durch

$$g_{00} = 1 + 2\Phi \quad (11)$$

gegeben ist, wobei das radialsymmetrische **Newtonsche Gravitationpotential**

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (12)$$

¹Musterlösungen werden ab 26.05.2015 verfügbar sein.

ist, wobei M die Gesamtmasse innerhalb der Kugel vom Radius r um das Zentrum bezeichnet. Damit ergibt sich für den **Schwarzschild-Radius**

$$r_0 = 2GM. \quad (13)$$

Der Schwarzschild-Radius ist nur scheinbar eine Singularität der Raum-Zeit, was schon daran klar wird, daß

$$g = -\det(g_{\mu\nu}) = r^4 \sin^2 \vartheta \quad (14)$$

nicht singular ist außer bei $r = 0$ und $\vartheta \in \{0, \pi\}$. Die letztere Singularität läßt sich beseitigen, indem man statt (r, ϑ, φ) kartesische räumliche Koordinaten einführt wie im Fall von Kugelkoordinaten im 3D Euklidischen Raum. Die einzige echte Singularität der radialsymmetrischen Vakuumlösung ist also das Symmetriezentrum bei $r = 0$. Für gewöhnliche Himmelskörper wie die Sonne liegt aber auch dann keine Singularität vor, weil die Ausdehnung derselben größer als der Schwarzschild-Radius ist (vgl. die Vorlesung zum Thema Sternbau in der ART und die statischen radialsymmetrischen **Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Lösungen** der ART für den Innenraum der Sterne).

3 Gaußsche radialsymmetrische Koordinaten

Die Koordinatensingularität bei $r = r_0$ läßt sich durch verschiedene geeignete Koordinatentransformationen beseitigen. Eine Möglichkeit, die sich auch für die Untersuchung des Sturzes (staubförmiger) Materie ins Symmetriezentrum besonders gut eignet, ist die Einführung **Gaußscher Koordinaten**. Diese liegen vor, wenn $g_{00} = 1$ ist. Dann beschreibt die Zeitkoordinate die Eigenzeit eines bzgl. der entsprechenden räumlichen Koordinaten ruhenden Beobachters, $(q^1, q^2, q^3) = \text{const}$. Solche Koordinaten lassen sich in jedem regulären Punkt der betrachteten Raumzeit definieren, indem man verlangt, daß $(q^1, q^2, q^3) = \text{const}$ Geodäten beschreibt. Dies entspricht einer Schar frei fallender Teilchen in dem betreffenden Raumzeit-Gebiet.

Auf dem Übungsblatt 1 wurde gezeigt, daß sich im uns interessierenden Fall einer radialsymmetrischen Raumzeit sogar stets **Gaußsche Normalkoordinaten** einführen lassen, bzgl. derer definitionsgemäß die Metrik diagonal wird. Die allgemeinst mögliche Form solcher radialsymmetrischer Metriken in Gaußschen Normalkoordinaten ist demnach

$$ds^2 = d\tau^2 - U(R, \tau)dR^2 - \rho^2(R, \tau)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (15)$$

Wir bemerken, daß die Schwarzschildsche Radialkoordinate offensichtlich durch $r = \rho(R, \tau)$ mit den Gaußschen Normalkoordinaten zusammenhängt.

4 Die radialsymmetrische Einsteingleichung für Staub

Im folgenden betrachten wir den Fall **staubförmiger Materie**, d.h. Materie, die aus einzelnen „Staubteilchen“ besteht, die so dünn ist, daß man die durch sie verursachte Gravitation vernachlässigen kann. Wir wollen annehmen, daß diese Materie in einem endlichen Bereich $r < a$ bzgl. der Schwarzschild-Koordinaten verteilt ist und außerhalb die eindeutige radialsymmetrische Schwarzschild-Radius gilt. Das bedeutet, daß sich die Staubteilchen **radial auf das Zentrum zu bzw. von ihm weg bewegen** müssen, damit diese Symmetrieforderung erfüllt ist.

Während man sich bei der Theorie der Sterne für statische Lösungen interessiert, bei denen der Gasdruck den **Gravitationskollaps** verhindert, interessieren wir uns hier für das einfachste Beispiel eben eines solchen Kollapses.

4.1 Lösung der Einsteingleichungen mit Staubmaterie I

Da in den Gaußschen Normalkoordinaten die radial fallenden (d.h. Trajektorien $\varphi = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$) Staubteilchen sich auf der Geodäte $R = \text{const}$ bewegen, also bzgl. dieser **mitbewegten Koordinaten** ruhen und die Koordinatenzeit folglich deren Eigenzeit parametrisiert, lautet der Energie-Impulstensor

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon u_\mu u_\nu, \quad (u^\mu) = (1, 0, 0, 0). \quad (16)$$

Dabei ist u_μ die Vierergeschwindigkeit der Staubteilchen, die bzgl. der Gaußschen Koordinaten ruhen, und daher ist die Energiedichte ε identisch mit der Eigenmassendichte der Materie.

Wir berechnen zunächst die Christoffel-Symbole der Metrik mittels (1) (15)²:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} \dot{U}, \quad (17)$$

$$\Gamma_{22}^0 = \rho \dot{\rho}, \quad (18)$$

$$\Gamma_{33}^0 = \rho \dot{\rho} \sin^2 \vartheta, \quad (19)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{U}}{2U}, \quad (20)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{U'}{2U}, \quad (21)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{\rho \rho'}{U}, \quad (22)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{\rho \rho'}{U} \sin^2 \vartheta, \quad (23)$$

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{\rho}}{\rho}, \quad (24)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\rho'}{\rho}, \quad (25)$$

$$\Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{\rho}}{\rho}, \quad (26)$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{\rho'}{\rho}, \quad (27)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\cos \vartheta \sin \vartheta, \quad (28)$$

$$\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{\rho}}{\rho}, \quad (29)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{\rho'}{\rho}, \quad (30)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \vartheta \quad (31)$$

Die übrigen Christoffel-Symbole verschwinden, und wir haben die Ableitung nach der Koordinatenzeit τ mit einem Punkt und die bzgl. der Koordinate R mit einem Strich.

²Hier bietet sich die Verwendung eines Computer-Algebra-Systems an. Im Anhang ist ein entsprechendes `Mathematica`-Notebook abgedruckt.

Da der Energie-Impulstensor in unserem Fall besonders einfach ist, weil nur $T_{00} \neq 0$ ist, empfiehlt sich hier die Verwendung der Einsteinschen Feldgleichungen in der Form (5). Wir finden für diese Gleichungen

$$G_{00} = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \frac{\dot{\rho}\dot{U}}{\rho U} + \frac{\rho'^2}{\rho^2 U} + \frac{2\rho''}{\rho U} - \frac{\rho'U'}{\rho U^2} \stackrel{!}{=} -\chi\varepsilon, \quad (32)$$

$$G_{01} = G_{10} = \frac{2\dot{\rho}'}{\rho} - \frac{\dot{U}\rho'}{\rho U} \stackrel{!}{=} 0, \quad (33)$$

$$G_{11} = \frac{U}{\rho^2} + \frac{U\dot{\rho}^2}{\rho^2} + \frac{2U\ddot{\rho}}{\rho} - \frac{\rho'}{\rho^2} \stackrel{!}{=} 0, \quad (34)$$

$$G_{22} = \frac{\rho\dot{\rho}U'}{2U} - \frac{\rho^2\dot{U}^2}{4U^2} + \rho\ddot{\rho} + \frac{\rho^2\ddot{U}}{2U} - \frac{\rho\rho''}{U} \stackrel{!}{=} 0, \quad (35)$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \vartheta \stackrel{!}{=} 0. \quad (36)$$

Die Strategie zur Lösung dieser Gleichungen ist nun, zunächst die Restriktionen an die Funktionen ρ und U aufgrund der Gleichungen (33-35) zu ermitteln, da diese Gleichungen sowohl für die Vakuum-Lösung außerhalb der Materie ($\varepsilon = 0$) die dann notwendig durch eine geeignete Koordinatentransformation in die Schwarzschild-Lösung (10) überführbar sein muß, als auch für den Innenraum $R < R_0$, wo sich die Materie befindet ($\varepsilon > 0$). Es ist klar, daß dann auch (36) erfüllt ist.

Wir können (33) in die Form

$$\frac{\dot{U}}{U} = 2\frac{\dot{\rho}'}{\rho'} \quad (37)$$

bringen. Diese Gleichung läßt sich bzgl. τ integrieren. Bis auf eine willkürliche Funktion $C_1(R)$ (Integrationskonstante bzgl. der τ -Integration) ergibt sich

$$U = \frac{\rho'^2}{1 + C_1}, \quad C_1 = C_1(R). \quad (38)$$

Dadurch können wir U aus allen Feldgleichungen eliminieren. Setzen wir (38) zunächst in (34) und (35) ein, erhalten wir

$$G_{11} = \frac{\rho'^2}{(1 + C_1)\rho^2} [2\ddot{\rho}\dot{\rho} + \dot{\rho}^2 - C_1] \stackrel{!}{=} 0, \quad (39)$$

$$G_{22} = \rho\ddot{\rho} - \frac{\rho C_1'}{2\rho'} + \frac{\rho\dot{\rho}\rho'}{\rho'} + \frac{\rho^2\ddot{\rho}'}{\rho'} \stackrel{!}{=} 0. \quad (40)$$

Mit (39) folgt

$$2\ddot{\rho}\dot{\rho} + \dot{\rho}^2 - C_1 = 0. \quad (41)$$

Leiten wir diese Gleichung nach R ab, ergibt sich, daß damit auch (40) erfüllt ist. Aus (39) folgt weiter

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\dot{\rho}^2) = \dot{\rho}(\dot{\rho}^2 + 2\ddot{\rho}\rho) \stackrel{(39)}{=} C_1\dot{\rho}. \quad (42)$$

Da C_1 von τ unabhängig ist, können wir diese Gleichung sofort bzgl. τ integrieren und erhalten die Beziehung

$$\dot{\rho}^2(R, \tau) = C_1(R) + \frac{C_2(R)}{\rho(R, \tau)}. \quad (43)$$

Dabei ist $C_2(R)$ die Integrationskonstante von der Integration bzgl. τ und damit eine weitere willkürliche Funktion. Leiten wir (43) nach R ab, erhalten wir

$$C_1'(R) = 2\dot{\rho}\dot{\rho}' - \left(\frac{C_2}{\rho}\right)' \quad (44)$$

und damit sowie mit (38) und (43)

$$G_{00} = \frac{C_1}{\rho^2} - \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho\rho'}(C_1' - 2\dot{\rho}\dot{\rho}') \stackrel{!}{=} -\chi\varepsilon \Rightarrow \frac{C_2'}{\rho^2\rho'} = \chi\varepsilon. \quad (45)$$

4.2 Vakuumlösung

Nun wollen wir zunächst eine Lösung für den Außenraum $R > R_0$ bestimmen. Dann gilt $\varepsilon = 0$ und somit gemäß (45) $C_2 = \text{const.}$ Da C_1 ebenfalls eine beliebige Funktion ist, können wir den Ansatz $C_1 \equiv 0$ machen. Dann folgt aus (43)

$$\dot{\rho}^2 = \frac{C_2}{\rho} \Rightarrow \tau = \frac{2}{3\sqrt{C_2}}\rho^{3/2} + \tau_0(R), \quad (46)$$

wobei τ_0 eine weitere willkürliche Funktion von R ist. Setzen wir der Einfachheit halber $\tau_0(R) = R$, ergibt sich daraus

$$\rho(R, \tau) = \left(\frac{9C_2}{4}\right)^{1/3} (\tau - R)^{2/3}. \quad (47)$$

Aus (38) folgt wegen $C_1 = 0$

$$U = \rho'^2 = \left(\frac{2}{3} \frac{C_2}{\tau - R}\right)^{2/3}. \quad (48)$$

Damit ergibt sich für die Metrik

$$ds^2 = d\tau^2 - \left(\frac{2}{3} \frac{C_2}{\tau - R}\right)^{2/3} dR^2 - \left(\frac{9C_2}{4}\right)^{2/3} (\tau - R)^{4/3} (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (49)$$

Nun muß sich diese Metrik durch Transformation der Koordinaten (τ, R) in die Schwarzschild-Koordinaten (t, r) in die Form (10) bringen lassen. Zunächst ist $r = \rho(R, T)$, wie sich aus dem Winkelanteil der Metrik (49) ergibt.

Die Metrik (49) wird nur entlang der Diagonale $\tau = R$ im (R, τ) -Diagramm singulär. Dem entspricht der Punkt $r = 0$, der für die Vakuumlösung eine echte Singularität darstellt.

Machen wir nun für die Transformation zwischen $(q^0, q^1) = (t, r)$ und $(q'^0, q'^1) = (\tau, R)$ den Ansatz

$$\tau = t + F(r), \quad R = t + G(r), \quad (50)$$

ergibt sich wegen

$$g_{\mu\nu} = g'_{\rho\sigma} \frac{\partial q'^{\rho}}{\partial q^{\mu}} \frac{\partial q'^{\sigma}}{\partial q^{\nu}} \quad (51)$$

zunächst

$$g_{00} = 1 - \left(\frac{2C_2}{3(F-G)}\right)^{2/3} \stackrel{!}{=} 1 - \frac{r_0}{r} \Rightarrow F(r) = \frac{2C_2}{3} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{3/2} + G[r]. \quad (52)$$

Mit (51) liefert dies weiter

$$g_{01} = g_{10} = C_2 \sqrt{\frac{r}{r_0^3} + \frac{r-r_0}{r}} G'(r) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow G(r) = 2C_2 \left[r_0 \operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right) - \frac{r+3r_0}{3} \right] + C_3 \quad (53)$$

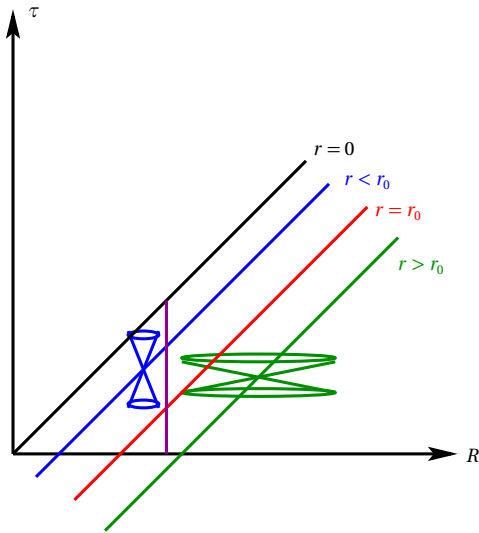
mit $C_3 = \text{const.}$ Wir können C_3 so bestimmen, daß $(t, r) = 0 \Leftrightarrow (\tau, R) = 0$ gilt, d.h. $G(0) = 0$, also $C_3 = 2C_2 r_0$ setzen. Schließlich folgt daraus mit (51) noch

$$g_{11} = \frac{C_2^2 r}{r_0^2 (r_0 - r)} \stackrel{!}{=} \frac{r}{r - r_0} \Rightarrow C_2 = r_0. \quad (54)$$

4.3 Radialer Sturz eines Teilchens in ein schwarzes Loch

Jetzt können wir den radialen Sturz eines Teilchens in ein schwarzes Loch diskutieren, d.h. der Situation, daß die gesamte gravitierende Masse im Zentrum $r = 0$ vereinigt ist. Dazu betrachten wir die Situation in einem τ - R -Diagramm. Zunächst ergibt sich aus (50) und (52)

$$\tau = R - (F - G) = R - \frac{2r_0}{3} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{3/2}. \quad (55)$$



Die Linien $r = \text{const}$ sind also Diagonalen im τ - R -Diagramm unterhalb der Linie $\tau = R$, die dem Zentrum $r = 0$ entspricht. Die radialen Geodäten $R = \text{const}$ beschreiben die Bewegung von Teilchen, die sich entweder radial vom Zentrum weg- oder auf es zubewegen. Im letzteren Falle zeigt sich, daß beim Durchqueren des Ereignishorizonts bei $r = r_0$, die durch die Linie $\tau = R - \frac{2r_0}{3}$ repräsentiert wird, bzgl. mitbewegter Koordinaten keine Singularität eintritt und das Teilchen nach einer endlichen Eigenzeit τ in die Singularität bei $r = 0$ stürzt.

Weiter betrachten wir radiale Lichtstrahlen. Sie definieren die lokalen Lichtkegel in jedem Punkt (τ, R) . Setzen wir in (49) gemäß (54) $C_2 = 0$ ein, folgt aus $ds = 0$ (für $d\vartheta = d\varphi = 0$, einem radial sich ausbreitenden Lichtsignal entsprechend)

$$\frac{d\tau}{dR} = \pm \sqrt{\frac{r_0}{r}}. \quad (56)$$

Für $r > r_0$ ist $|d\tau/dR| < 1$, und die Linien $r = \text{const}$ liegen innerhalb des lokalen Lichtkegels, sind also zeitartig. Für $r < r_0$ ist $|d\tau/dR| > 1$ und die Linien $r = \text{const}$ sind dort also stets raumartig, können also keine Weltlinien von Teilchen beschreiben. Dies impliziert allerdings lediglich, daß innerhalb der Schwarzschild-Sphäre die Teilchen nicht in Ruhe sein können. Die Wahl der Koordinaten (τ, R) impliziert, daß demnach Teilchen, die sich dort befinden, notwendig stets nach einer endlichen Eigenzeit τ ins Zentrum stürzen, denn definitionsgemäß bewegen sich Teilchen stets in Richtung wachsender Eigenzeit. Freilich löst auch die Transformation $\tau = -t - F$, $R = t + G$ mit denselben Funktionen F und G wie eben hergeleitet werden, was einer Ersetzung $\tau \rightarrow -\tau$ entspricht. Diese Möglichkeit der Parametrisierung beschreibt dann ebenfalls eine Situation, in der Teilchen innerhalb der Schwarzschild-Sphäre nicht ruhen können, sich jedoch nach außen bewegen.

Der physikalischen Situation für einen endlichen Stern, dessen Druck nicht ausreicht, der Gravitationswirkung standzuhalten, entspricht die hier besprochene Vorzeichenwahl gemäß (50), d.h. der Stern kollabiert in solch einem Fall.

4.4 Lösung der Einsteingleichung mit Materie II

Wir wenden uns nun der Lösung innerhalb der Kugel $R < R_0$, in der sich die Staubmaterie befindet, zu. Es gelten alle Formeln in Abschnitt (4.1), denn wir haben uns dort nur auf die Lösung der Gleichungen (33-36) gestützt, die sowohl im Vakuum als auch für Raumzeitbereiche mit Staubmaterie gelten. Wir können also auf (43) zurückgreifen. Wir können diese Gleichung (bei festgehaltenem R) in impliziter Form integrieren:

$$\tau = \pm \int \frac{d\rho}{\sqrt{C_1 + C_2/\rho}}. \quad (57)$$

Das Integral läßt sich einfacher in parametrischer Form diskutieren, und zwar für verschiedene Fälle:

(i) $C_1 > 0$. Dann bietet sich die Substitution

$$\rho = \frac{C_2}{2C_1}(\cosh \eta - 1) = \frac{C_2}{C_1} \sinh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) \quad (58)$$

an. Das entsprechende Integral liefert dann

$$\tau = \pm \frac{C_2}{2C_1^{3/2}}(\sinh \eta - \eta) + \tau_0(R), \quad (59)$$

wobei τ_0 wieder eine willkürliche Integrationskonstante, die von R abhängen kann, ist. Da ρ die Schwarzschild-Radialkoordinate ist, und wir Kollapslösungen suchen, für die ρ mit wachsendem τ für die Geodäte $R = \text{const}$ monoton fällt, wählen wir das untere Vorzeichen, wobei wir $C_2 > 0$ annehmen. Dann erhalten wir

$$\tau = \tau_0(R) - \frac{C_2}{2C_1^{3/2}}(\sinh \eta - \eta). \quad (60)$$

(ii) $C_1 < 0$. Dann substituieren wir im Integral (57)

$$\rho = \frac{C_2}{-2C_1}(1 - \cos \eta) = \frac{C_2}{-C_1} \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right). \quad (61)$$

Das Integral mit der entsprechenden kontrahierenden Lösung ($\eta \in [0, \pi]$) lautet dann

$$\tau = \tau_0(R) - \frac{C_2}{2(-C_1)^{3/2}}(\eta - \sin \eta). \quad (62)$$

In diesem Fall ist die Einführung eines neuen Parameters $\eta' = \pi - \eta$ bequemer, denn dann wird τ monoton wachsend mit η' . Dann gilt

$$\tau = \tilde{\tau}_0(R) + \frac{C_2}{2(-C_1)^{3/2}}(\eta' + \sin \eta'), \quad (63)$$

$$\rho = \frac{C_2}{-C_1}(1 + \cos \eta') = \frac{C_2}{-C_1} \cos^2\left(\frac{\eta'}{2}\right) \quad (64)$$

Die Trajektorien von Staubteilchen $R = 0$ enden also bei $\eta' = \pi$, also einer endlichen Eigenzeit im Zentrum.

- $C_1 = 0$ haben wir bereits oben bei der Vakuum-Lösung behandelt. Hier ist es unnötig, die Lösung als Parameterdarstellung anzugeben. Die Ausführung des Integrals (57) liefert als allgemeine kontrahierende Lösung

$$\rho = \left(\frac{9C_2}{4}\right)^{1/3} [\tau_0(R) - \tau]^{2/3}. \quad (65)$$

Auch in diesem Fall stürzt ein Teilchen zur endlichen Eigenzeit $\tau = \tau_0(R)$ ins Zentrum.

Nun müssen wir die Bedingung einarbeiten, daß wir eine räumlich endlich ausgedehnte Staubwolke betrachten. In mitbewegten Gauß-Koordinaten bleibt der „Radius“ der Staubwolke R_0 konstant. Als weiteren physikalischen Parameter haben wir noch die Gesamtmasse M der Staubwolke. Die Gesamtmasse ist als Volumenintegral über die Eigenenergiedichte ε der Materie gegeben. Das kovariante räumliche Volumenelement in Schwarzschild-Koordinaten ist das eines Euklidischen Raumes, also $d^3\vec{x} = dr d\vartheta d\varphi \sin\vartheta$, so daß wir für eine radialsymmetrische Materieverteilung

$$M = 4\pi \int_0^{\rho(\tau, R_0)} d\rho \rho^2 \epsilon = 4\pi \int_0^{R_0} dR \rho^2 \rho' \epsilon \quad (66)$$

erhalten. Mit (45) finden wir schließlich

$$M = 4\pi \int_0^{R_0} dR \frac{C_2'}{\chi} = \frac{4\pi}{\chi} C_2(R_0) = \frac{C_2(R_0)}{2G}. \quad (67)$$

Für $R > R_0$ muß die Lösung der Einstein-Gleichungen in die Vakuumlösung übergehen, die wir über die in Abschnitt 4.2 gefundene Form beschreiben wollen. Da gemäß (45) und (54) im Vakuum $C_2 = r_0 = \text{const}$ ist, erhalten wir die konsistente Anschlußbedingung

$$C_2(R_0) = 2GM = r_0. \quad (68)$$

Die Zeitentwicklung des Kollapses kann nun für Zeiten kurz vor dem Kollaps, also für $\tau \simeq \tau_0(R)$, d.h. für die Parameterdarstellungen (60) und (62) für $\eta \simeq 0$ unabhängig von der konkreten Struktur (also der Radialverteilung der Staubmasse) bestimmt werden. In beiden Fällen ist nämlich

$$\tau \underset{\tau \rightarrow \tau_0(R)}{\cong} \frac{C_2}{12|C_1|^{3/2}} \eta^3 \quad (69)$$

und folglich wegen (59) und (61)

$$\rho \underset{\tau \rightarrow \tau_0(R)}{\cong} \left(\frac{9C_2}{4}\right)^{1/3} [\tau_0(R) - \tau]^{2/3}. \quad (70)$$

Aus (45) folgt dann für die eigentliche Massendichte

$$\varepsilon(\tau, R) = \frac{2C_2'(R)}{3C_2\tau_0'(R)[\tau_0(R) - \tau]}. \quad (71)$$

Die Staubmaterie stürzt also in endlicher Eigenzeit der Staubteilchen ins Zentrum, und die Energiedichte wird singulär, d.h. es entsteht ein **schwarzes Loch**.

4.5 Räumlich homogener Staub

Um ein konkretes Beispiel zu behandeln, betrachten wir das Beispiel von **räumlich homogenem Staub**, d.h. wir nehmen an, daß

$$\varepsilon = \varepsilon(\tau) \quad (72)$$

ist. Offenbar ergeben sich Lösungen für diesen Fall, wenn in (63-64) $\tau_0 = \text{const}$ und $C_2/(-C_1)^{3/2} = \text{const}$ werden. Leider wird dann (71) singular. Wir müssen also die Schritte aus Abschnitt 4.4 für diesen Spezialfall gesondert nachvollziehen. Zunächst machen wir den Ansatz

$$C_2 = 2C_3(-C_1)^{3/2}, \quad (73)$$

In der Tat wird dann unabhängig von der Wahl der Funktion $C_1(R)$ gemäß (45)

$$\chi\varepsilon = \frac{6}{C_3^2(1 + \cos\eta')^3} \quad (74)$$

unabhängig von R , denn gemäß unserer Konstruktion wird wegen (63) mit $\tilde{\tau}_0 = 0$

$$\tau = C_3(\eta' + \sin\eta') \quad (75)$$

unabhängig von R , d.h. η' kann als Funktion von τ allein angesehen werden. Weiter ist wegen (64)

$$\rho = C_3\sqrt{-C_1}(1 + \cos\eta'). \quad (76)$$

Setzen wir dann $C_1 = -KR^2$, so wird mit $a(\tau) = \sqrt{K}C_3(1 + \cos\eta')$

$$C_2(R) = 2C_3(R\sqrt{K})^3, \quad \rho(R, \tau) = a(\tau)R, \quad U(R, \tau) = \frac{a^2(\tau)}{1 - K^2R^2}. \quad (77)$$

Es ist nun bequem $a(0) = 1$, also $C_3 = 1/(2\sqrt{K})$ zu setzen. Wegen (68) folgt dann

$$C_2(R_0) = KR_0^3 = 2MG \Rightarrow K = \frac{2MG}{R_0^3} = \frac{r_0}{R_0^3}, \quad C_1 = -KR^2 = -\frac{r_0}{R_0^3}R^2. \quad (78)$$

Schließlich haben wir die folgende parametrische Lösung für die Metrik

$$\tau = \frac{R_0^{3/2}}{2\sqrt{r_0}}(\eta' + \sin\eta'), \quad \rho(R, \tau) = R\cos^2\left(\frac{\eta'}{2}\right), \quad a(\tau) = \cos^2\left(\frac{\eta'}{2}\right). \quad (79)$$

Mit (47) folgt für die Energiedichte

$$\epsilon = \frac{6M}{\pi R_0^3(1 + \cos\eta')^3} = \frac{3M}{4\pi R_0^3 a^3(\tau)}. \quad (80)$$

Wir bemerken, daß die resultierende Metrik

$$ds = d\tau^2 - a^2(\tau) \left[\frac{dR^2}{1 - r_0 R^2 / R_0^3} + R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \right] \quad (81)$$

einer **Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker-Lösung** wie in der Kosmologie für ein homogen mit Materie gefülltes Universum entspricht. Dies muß so sein, weil dies (bis auf Koordinatentransformationen die eindeutige Form für eine solche homogene und isotrope Raum-Zeit ist. Es ist klar, daß $R_0 > r_0$ sein muß, damit (81) überall im Innenraum $R < R_0$ regulär ist. Wegen $\rho = a(\tau)R$ und $a(0) = 1$ bedeutet dies, daß die Oberfläche des Sterns zu Beginn des Kollapses außerhalb des Schwarzschild-Radiuses liegen muß. Dies entspricht der Situation, daß ein Beobachter außerhalb des Sterns denselben beobachten kann. Ein Körper, der ganz im Inneren der Schwarzschild-Sphäre einer radialsymmetrischen Verteilung liegt, erscheint einem äußeren Beobachter, der relativ zum Zentrum der Materieverteilung ruht (sich also notwendig außerhalb der Schwarzschild-Kugel befindet) als Punktmasse, und macht sich ausschließlich durch seine Gravitationswirkung bemerkbar, da aus dem Innenbereich keine Signale nach außen gelangen können.

Diese Form der Innenraumlösung für die Metrik (81) mit der durch (79) parametrisch gegebenen Lösung schließt sich nun nicht kontinuierlich an die in Abschnitt 4.2 angegebene explizite Vakuum-Lösung an, wo wir der Einfachheit halber willkürlich $C_1(R) \equiv 0$ gesetzt hatten.

Um die Vakuumaußenraumlösung für $R > R_0 > r_0$ an die Innenraumlösung anzuschließen, benötigen wir vielmehr eine Parametrisierung wie in (63-64). Wegen (45) ist notwendig $C_2(R) = r_0 = \text{const}$, wobei sich der Wert aus der Forderung ergibt, daß die Lösung der Einsteingleichung für den Innenraum $R < R_0$ und den Außenraum $R > R_0$ kontinuierlich aneinander anschließen müssen. Dabei können wir auch im Außenraum wieder $\tau_0(R) = 0$ setzen. Aus (64) ergibt sich dann, daß wir jetzt am bequemsten

$$C_1(R) = \frac{r_0}{R} \Rightarrow \rho(R, \tau) = \frac{R}{2}(1 + \cos \eta') = R \cos^2\left(\frac{\eta'}{2}\right) \quad (82)$$

setzen. Dabei wird auch C_1 stetig in R_0 , und die Parametrisierung für τ ergibt sich folglich aus (63) zu

$$\tau = \frac{R^{3/2}}{2\sqrt{r_0}}(\eta' + \sin \eta'). \quad (83)$$

Man beachte, daß im Außenraum η' nicht allein von τ sondern auch von R abhängt. Freilich schließt (83) wegen der Kontinuität der Funktionen C_1 und C_2 stetig an die Innenraumlösung (79) an.

Die Umrechnung der Innenraumlösung in Schwarzschild-Koordinaten ist recht kompliziert und ist in [Wei72] angegeben.

Wir können aber den physikalischen Gehalt der Lösung für einen weit vom Stern entfernten (näherungsweise inertialen) Beobachter auch ohne diese Koordinatentransformation diskutieren, indem wir beachten, daß $r = \rho(R, \tau)$ die Schwarzschild-Koordinate ist und Linien $R = \text{const}$ in der r - τ -Ebene die frei fallenden Staubteilchen beschreiben. Betrachten wir also die Oberfläche des Sterns $R = R_0 = \text{const}$. Offenbar ist der Definitionsbereich des Parameters η' in (82) und (83) $\eta' \in [0, \pi)$. Für $\eta' \rightarrow \pi$ wird $\rho(R, \tau) \equiv 0$, d.h. insbesondere, daß alle Staubteilchen zur gleichen endlichen Eigenzeit $\tau_{\text{Kollaps}} = \pi R_0^{3/2} / (2\sqrt{r_0})$ ins Zentrum stürzen.

Wegen $R_0 > r_0$ befand sich zur Zeit $\tau = 0$ (entsprechend $\eta' = 0$) die Oberfläche der Staubwolke außerhalb des Schwarzschild-Radiuses der Vakuumlösung. Zur Eigenzeit τ_0 , die durch

$$\cos(\eta'_0/2) = \sqrt{r_0/R_0}, \quad (84)$$

also $0 < \eta' < \pi$, bestimmt ist, durchqueren die Staubteilchen auf der Oberfläche den Schwarzschild-Ereignishorizont. Wie bereits oben bei der Besprechung der Schwarzschild-Lösung betont, stellt dies aus Sicht eines mit dem Staubteilchen frei fallenden Beobachters keinerlei Besonderheit dar.

Um zu verstehen, wie dieses Ereignis von einem weit von der Staubwolke entfernten bzgl. Schwarzschild-Koordinaten ruhenden Beobachter wahrgenommen wird, berechnen wir den Zusammenhang zwischen der Eigenzeit τ und der Schwarzschild-Zeit t , die ein solcher Beobachter mißt. Der Zusammenhang ist durch die Metrik in Schwarzschild-Koordinaten gegeben, wobei wir wieder die Oberfläche der Staubwolke betrachten, also $R = R_0$ setzen. Nun $r = \rho(R_0, \tau)$ der Radius der Staubwolke für den äußeren Beobachter, und der Zusammenhang zur Eigenzeit eines dort befindlichen Staubteilchens ist durch

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_0}{\rho(R_0, \tau)}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_0}{\rho(R_0, \tau)}\right)^{-1} dr^2 \quad (85)$$

gegeben. Bzgl. der Parametrisierung mit η' folgt also die Differentialgleichung

$$(\partial_{\eta'} \tau)^2 = \left(1 - \frac{r_0}{\rho(R_0, \eta')}\right) (\partial_{\eta'} t)^2 - \left(1 - \frac{r_0}{\rho(R_0, \eta')}\right)^{-1} [\partial_{\eta'} \rho(R_0, \eta')]^2. \quad (86)$$

Setzt man hierin (79) für $R = R_0$ ein, erhält man

$$t = 2r_0 \operatorname{artanh} \left[\sqrt{\frac{r_0}{R_0 - r_0}} \tan\left(\frac{\eta'}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_0 - r_0}{r_0}} [2r_0 \eta' + R_0(\eta' + \sin \eta')]. \quad (87)$$

Aus (84) folgt, daß $\tan(\eta'_0/2) = \sqrt{(R_0 - r_0)/r_0}$ gilt und folglich die Oberfläche der Staubwolke den Schwarzschild-Radius für $t \rightarrow \infty$ durchquert. Was mit dem Staub im Inneren der Schwarzschild-Kugel geschieht, kann von außen zu keiner endlichen Zeit beobachtet werden. Die Schwarzschild-Kugel ist also für einen äußeren Beobachter in der Tat ein **Ereignishorizont**.

Literatur

- [LL92] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, Bd. 2 von *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Akademie Verlag, Berlin (1992).
- [Wei72] S. Weinberg, *Gravitation and Kosmologie*, Wiley&Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto (1972).