Übungen zur Kosmologie – Blatt 5

Aufgabe 11: Die Leuchtkraftentfernung

Die Leuchtkraftentfernung d_{L} einer weit entfernten Quelle wird in der Kosmologie durch

$$d_{\mathrm{L}}(z) = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \tag{1}$$

definiert, wobei L die Leuchtkraft der Quelle ist und F der gemessene Strahlungsfluß. Für $z > 0.1$ sind dabei die einfachen Näherungen für $d_{\mathrm{L}}(z)$ bzw. $D(z) = d_{\mathrm{L}}(z)/(1+z)$ (wie in Übungsaufgabe 7 auf Übungsblatt 3 angewendet) nicht mehr gültig. Die Leuchtkraftentfernung d_{L} ist dann nicht nur abhängig von der Rotverschiebung sondern insbesondere auch vom Energiebudget und der Geometrie des Universums.

Aus der FLRW-Metrik und den Friedmann-Gleichungen ergibt sich folgende allgemeine Form[1]

$$d_{\mathrm{L}}(z) = \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{|1-\Omega|}} S_K\left(\sqrt{|1-\Omega|}\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_R(1+z')^4 + \Omega_M(1+z')^3 + (1-\Omega)(1+z')^2 + \Omega_\Lambda}}\right). \tag{2}$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit und H_0 der heutige Hubble-Parameter. Ω_R, Ω_M, Ω_Λ und Ω sind die Energiebeiträge von Strahlung, Materie, kosmologischer Konstante und ihrer Summe als Bruchteil der kritischen Energiedichte $\rho_{\mathrm{krit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$. Für die Funktion S_K gilt dabei

$$S_K(x) = \begin{cases} \sinh(x) & \text{für} \quad K = -1 \quad \text{bzw.} \quad \Omega < 1 \quad \text{(hyperbolische Geometrie)} \\ x & \text{für} \quad K = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Omega = 1 \quad \text{(flache Geometrie)} \\ \sin(x) & \text{für} \quad K = 1 \quad \text{bzw.} \quad \Omega > 1 \quad \text{(sphärische Geometrie)} \end{cases} \tag{3}$$

Im Fall von $K = 0$ muß $\sqrt{|1-\Omega|}$ in (2) durch 1 ersetzt werden. Der Strahlungsbeitrag $\Omega_R \sim 10^{-4}$ kann im folgenden vernachlässigt werden.

1. Flaches Universum

(a) Erkläre qualitativ, warum $d_{\mathrm{L}}(z)$ für ein flaches Universum ($\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$) mit steigendem Ω_Λ größer wird. Was bedeutet das für die scheinbare Helligkeit von z.B. Supernovae einer festen Rotverschiebung?

(b) Bestimme nun für ein flaches Universum die Leuchtkraftentfernung einer Quelle bei $z = 1$ in den Grenzfällen $\Omega_M = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$ und $\Omega_M = 0$, $\Omega_\Lambda = 1$. Nimm dabei und im folgenden einen Hubble-Parameter von $H_0 = 70\,\mathrm{km/s/Mpc}$ an.

(c) Im allgemeinen läßt sich (2) leider nicht analytisch lösen. Für ein flaches Universum bietet jedoch eine Taylor-Entwicklung des Integranden eine gute Näherung. Entwickle also den Integranden in erster Ordnung in z um $z = 0$ und bestimme damit $d_{\mathrm{L}}(z)$.

[1] Zur Herleitung s. Zusatzmaterial auf der Vorlesungs-Webseite!

(d) Nutze das Ergebnis aus (c) und bestimme $d_{\mathrm{L}}(1)$ mit den aktuell aus Beobachtungen bestimmten Parametern von $\Omega_M = 0{,}3$, $\Omega_\Lambda = 0{,}7$ (entspricht dem sogenannten **Konkordanzmodell**, auch ΛCDM genannt, wobei Λ für die Präsenz der kosmologischen Konstante und CDM für „Cold Dark Matter" steht.

2. Hyperbolisches Universum

(e) Nimm nun den Extremfall eines leeren Universums an ($\Omega_\Lambda = \Omega_M = \Omega = 0$) und bestimme d_{L} exakt aus (2). Benutze dabei, daß

$$\sinh[\ln(x+a)] = \frac{1}{2}\left(x + a - \frac{1}{x+a}\right) \tag{4}$$

ist.

(f) Vergleiche das Resultat aus (e) für $z = 1$ mit dem Ergebnis eines flachen, materiedominierten Universums und dem Ergebnis des ΛCDM-Modells.

(g) Wie aus der Vorlesung und Aufgabe 7 bekannt ist, gilt für die Leuchtkraftentfernung

$$d_{\mathrm{L}}(z) = D(1+z) \approx \frac{c(1+z)}{H_0}\left[z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + \cdots\right] \tag{5}$$

Bestimme mit dieser Definition den Wert des Abbremsparameters q_0 für d_{L} aus den Teilaufgaben(b) bis (e). Ab welchem Wert von Ω_M liegt für den Fall (c) eine beschleunigte Expansion ($q_0 < 0$) vor?