Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2015**

Übungen zur Kosmologie – Blatt 4

Aufgabe 8: Verschiedene Formen der FLRW-Metrik

Die Standardform der Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker- bzw. FLRW-Metrik ist in **mitbewegten Koordinaten** durch

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right] = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2 \tag{1}$$

gegeben[1]. Dabei ist $K \in \{-1, 0, 1\}$ entsprechend einem offenen, flachen bzw. geschlossenen Universum.

(a) Führe über

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} \tag{2}$$

die konforme Zeit ein und zeige, daß dann die FLRW-Metrik die Form

$$\mathrm{d}s^2 = \tilde{a}^2(\tau)\left\{\mathrm{d}\tau^2 - \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right]\right\} \quad \text{mit} \quad \tilde{a}(\tau) = a[t(\tau)] \tag{3}$$

annimmt.

(b) Führe statt der Radialkoordinate die Größe

$$\chi = \int_0^r \mathrm{d}r' \frac{1}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{4}$$

ein und berechne die Umkehrfunktion $r(\chi)$. Zeige, daß dann die FLRW-Metrik bzgl. Koordinaten $(t, \chi, \vartheta, \varphi)$ die Form

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + S_K^2(\chi)(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right] \tag{5}$$

annimmt. Dabei ist

$$S_K(\chi) = \begin{cases} \sinh\chi & \text{für} \quad K = -1, \\ \chi & \text{für} \quad K = 0, \\ \sin\chi & \text{für} \quad K = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Welches sind für die drei Fälle $K \in \{-1, 0, 1\}$ die Wertebereiche für χ, so daß die Raumschnitte jeweils möglichst komplett abgedeckt werden und wo sind Koordinatensingularitäten?

(c) Zeige, daß durch $\tau - \chi = \text{const}$ radiale Nullgeodäten, also die Weltlinien von Lichtstrahlen mit $\vartheta = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ gegeben sind.

(d) Betrachte nun mit Hilfe der Koordinaten $(\chi, \vartheta, \varphi)$ die maximal symmetrischen Raumschnitte $t = \text{const}$ für die drei Fälle $k \in \{-1, 0, 1\}$. Wie groß sind die jeweiligen Gesamtvolumina der Raumschnitte?

[1] Wir setzen für diese Übung bequemerweise $c = 1$.

(e) Wie groß ist die zweidimensionale Fläche einer durch $\chi = \chi_0 = \text{const}$ definierten „Sphäre"? **Antwort:** $4\pi a^2(t) S_K^2(\chi)$.

Aufgabe 9: Zustandsänderung des kosmischen Substrats mit der Hubble-Expansion

Auf großräumigen Skalen wird die Raum-Zeit des Universums durch eine FLRW-Metrik (1) beschrieben. Die Einsteinschen Feldgleichungen mit kosmologischer Konstante lauten

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} = -\varkappa T_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

Aufgrund der Bianchi-Identität $\mathrm{D}_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$ und wegen der Verträglichkeit der Metrik mit der kovarianten Ableitung, d.h. $\mathrm{D}_\gamma G^{\alpha\beta} = 0$ folgt, daß notwendig die Gleichung

$$\mathrm{D}_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{8}$$

gilt, die die lokale Energieerhaltung für Materie und Strahlung beschreibt.

(a) Berechne die Divergenz $\mathrm{D}_\mu T^{\mu\nu} = 0$ des Energie-Impulstensors für ein ideales Fluid

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad u^\mu = (1,0,0,0). \tag{9}$$

Es dürfen dabei ohne Beweis die Christoffelsymbole bzgl. der Koordinaten in der Standardform (1) mit $(x^\mu) = (t, r, \vartheta, \varphi)$ der FLRW-Metrik benutzt werden:

$$\begin{aligned}
&{\Gamma^0}_{ij} = -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \quad \text{für} \quad i,j \in \{1,2,3\},\\
&{\Gamma^1}_{01} = {\Gamma^1}_{10} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad {\Gamma^1}_{11} = \frac{Kr}{1-Kr^2}, \quad {\Gamma^1}_{22} = -r(1-Kr^2), \quad {\Gamma^1}_{33} = -r(1-Kr^2)\sin^2\vartheta,\\
&{\Gamma^2}_{02} = {\Gamma^2}_{20} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad {\Gamma^2}_{12} = {\Gamma^2}_{21} = \frac{1}{r}, \quad {\Gamma^2}_{33} = -\cos\vartheta \sin\vartheta,\\
&{\Gamma^3}_{03} = {\Gamma^3}_{30} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad {\Gamma^3}_{13} = {\Gamma^3}_{31} = \frac{1}{r}, \quad {\Gamma^3}_{23} = {\Gamma^3}_{32} = \cot\vartheta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Alle anderen Christoffelsymbole verschwinden. Außerdem gilt

$$\mathrm{D}_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + {\Gamma^\alpha}_{\alpha\mu} T^{\mu\beta} + {\Gamma^\beta}_{\alpha\mu} T^{\alpha\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha(\sqrt{-g}\, T^{\alpha\mu}) + {\Gamma^\beta}_{\alpha\mu} T^{\alpha\mu}. \tag{11}$$

Zeigen Sie, daß sich daraus die Gleichung

$$\dot{\epsilon} + \frac{3\dot{a}(\epsilon + P)}{a} = 0 \tag{12}$$

ergibt.

(b) Was ergibt sich für nichtrelativistische Staubmaterie ($P = 0$) bzw. ultrarelativistische Materie (Strahlung, $\epsilon = 3P$) für die Funktion $\epsilon(a)$?

(c) Zeige, daß das Dreiervolumenelement des Raumschnitts $t = \text{const}$ durch

$$\mathrm{d}V^{(3)} = a^3 \frac{r^2}{\sqrt{1-Kr^2}} \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{13}$$

(d) Was folgt aus der lokalen Erhaltungsgleichung für die Energie $\mathrm{d}U = \epsilon \mathrm{d}V^{(3)}$?

(e) Wie läßt sich dieses Resultat in der Deutung des kosmologischen Substrats als eines Fluids im Hinblick auf die zeitliche Zustandsänderung interpretieren? Inwiefern ist dies mit der Interpretation des Energie-Impulstensors des Substrats im Sinne einer idealen Fluiddynamik konsistent?

Aufgabe 10: Zeitentwicklung des Skalenparameters für ein strahlungsdominiertes Universum
In der Vorlesung wurde gezeigt, daß eine der Friedmann-Gleichungen

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{\varkappa \epsilon}{3} \tag{14}$$

lautet. Im folgenden betrachten wir den Fall $\Lambda = 0$ und ein strahlendominiertes Universum, nehmen also die Zustandsgleichung $\epsilon = 3P$ an. Wie in Aufgabe 9 gezeigt wurde, gilt dann $\epsilon a^4 = \text{const}$

(a) Zeige, daß aus damit aus (14) die Differentialgleichung

$$(a\dot{a})^2 + Ka^2 = C_0^2, \quad C_0 = \frac{\varkappa \epsilon a^4}{3} = \text{const} \tag{15}$$

folgt

(b) Löse die Gleichung für ein flaches Universum ($K = 0$). Wähle den Zeitursprung so, daß $a(0) = 0$ ist.

(c) Löse die Gleichung auch für den Fall des geschlossenen ($K = +1$) und des offenen ($K = -1$) Universums (wieder mit der Anfangsbedingung $a(0) = 0$.

Hinweis: Dabei empfiehlt sich die Substitution eines Parameters η gemäß

$$a = C_0 \sin \eta \quad \text{für} \quad K = +1 \quad \text{bzw.} \quad a = C_0 \sinh \eta \quad \text{für} \quad K = -1. \tag{16}$$

Zum Schluß läßt sich dann eine geschlossene Form für $a(t)$ anwenden.

(d) Sizziere die Lösungen $a = a(t)$ und diskutiere die physikalische Bedeutung der Tatsache, daß notwendigerweise zumindest für $t = 0$ die Metrik wegen $a(0) = 0$ singulär wird. Was ist besonders am geschlossenen Universum ($K = +1$)?
