Untersuchung schwerer exotischer Mesonen mit Hilfe von Gitter-QCD

"Physikalisches Kolloquium " – Bergische Universität Wuppertal

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main, Institut für Theoretische Physik

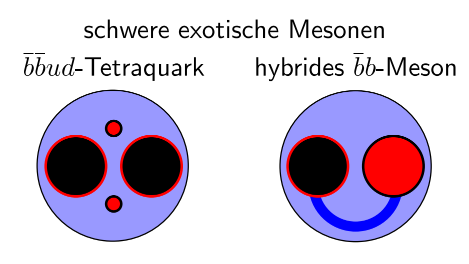
mwagner@itp.uni-frankfurt.de

http://itp.uni-frankfurt.de/∼mwagner/

November 27, 2023

Gliederung

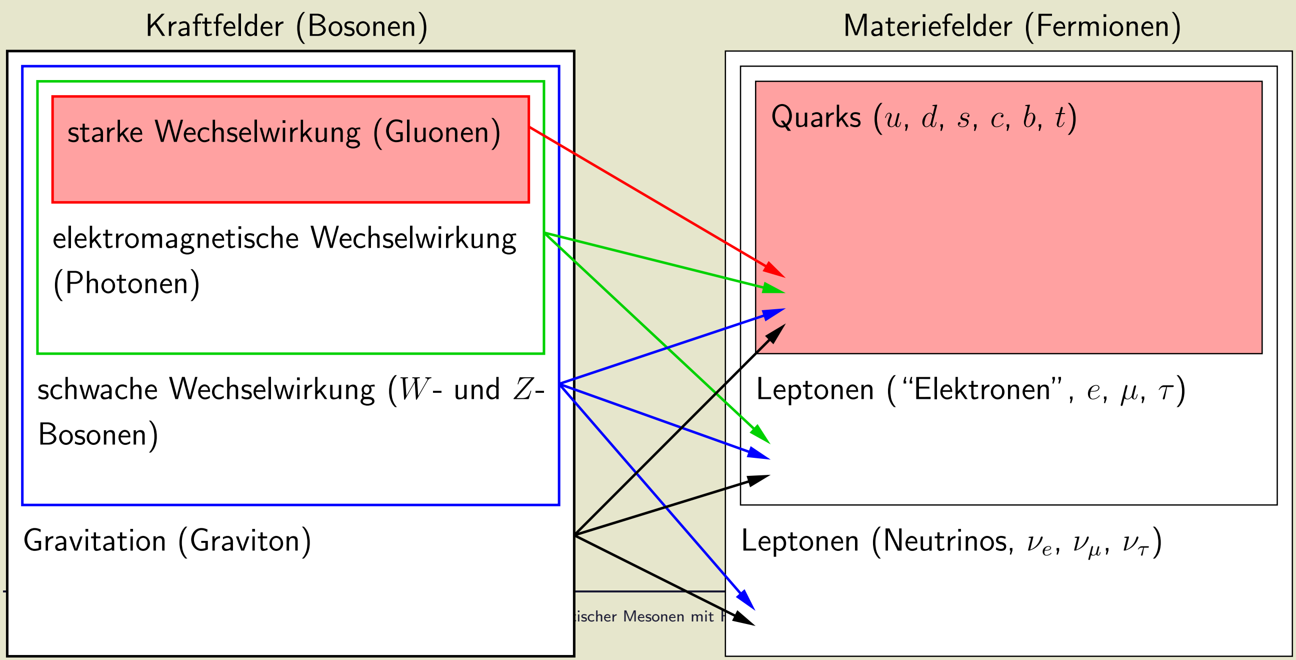
- **Teil 1**:
  Grundlagen von
  - **QCD** (= Quantenchromodynamik),
  - **Berechnung von Hadron-Massen im Rahmen der QCD**,
  - **Gitter-QCD** (= numerische QCD; technisch und daher ungeeignet für ein Kolloquium, dementsprechend sehr kurz).
- **Teil 2**:
  Gitter-QCD-Untersuchung von **schweren exotischen Mesonen** (in der Born-Oppenheimer-Approximation).
  (a) **Tetraquarks** bestehend aus zwei schweren Quarks $\bar{b}\bar{b}$ und zwei leichten Quarks qq.
  (b) **Schwere hybride Mesonen** $\bar{b}b$ + Gluonen.



Teil 1: Grundlagen von QCD (Quantenchromodynamik), Berechnung von Hadron-Massen, Gitter-QCD

“Standardmodell der Teilchenphysik”

- Vier fundamentale Kräfte, vermittelt durch Eichbosonen.
- Materie: Sechs Sorten von Quarks, sechs Sorten von Leptonen.
- **QCD**: Physikalische Theorie, die die Wechselwirkung von **Quarks** und **Gluonen** beschreibt ... und damit den Aufbau, die Masse und mögliche Zerfälle von daraus zusammengesetzten Systemen, z.B. Proton oder Neutron ... oder schwerer exotischer Mesonen.



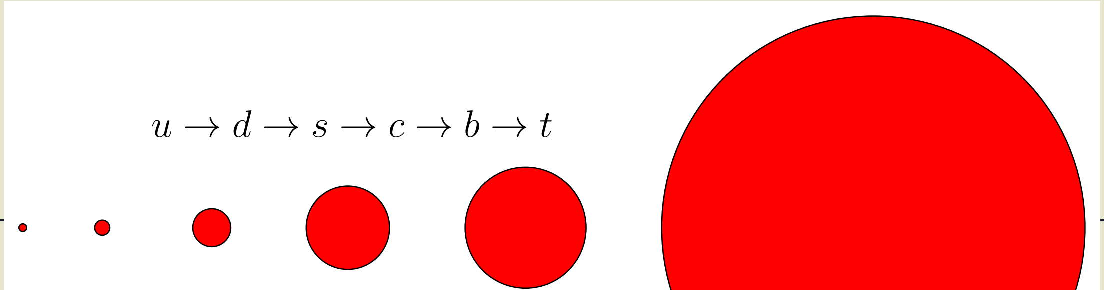
Quarks und Gluonen

- **Quarks und Antiquarks** (Spin $1/2$):
  - 6 Flavors ... **up**, **down**, **strange**, **charm**, **bottom**, **top** (unterschiedliche Massen).
  - 3 Farben ... **rot**, **grün**, **blau** (eine Art Ladung, ähnlich der elektrischen Ladung).

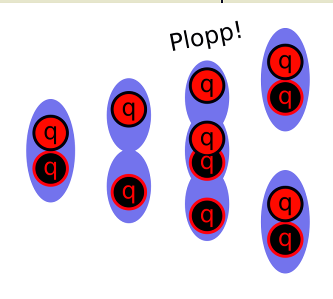
el. Ladung	$+2/3\,e$	$-1/3\,e$
	$m_{\text{up}} = 1.5 \ldots 3.3\,\text{MeV}/c^2$	$m_{\text{down}} = 3.5 \ldots 6.0\,\text{MeV}/c^2$
	$m_{\text{charm}} = 1160 \ldots 1340\,\text{MeV}/c^2$	$m_{\text{strange}} = 70 \ldots 130\,\text{MeV}/c^2$
	$m_{\text{top}} = 169100 \ldots 173300\,\text{MeV}/c^2$	$m_{\text{bottom}} = 4130 \ldots 4370\,\text{MeV}/c^2$

(e: Elementarladung; $1\,\text{MeV}/c^2 = 1.79 \times 10^{-30}\,\text{kg}$)

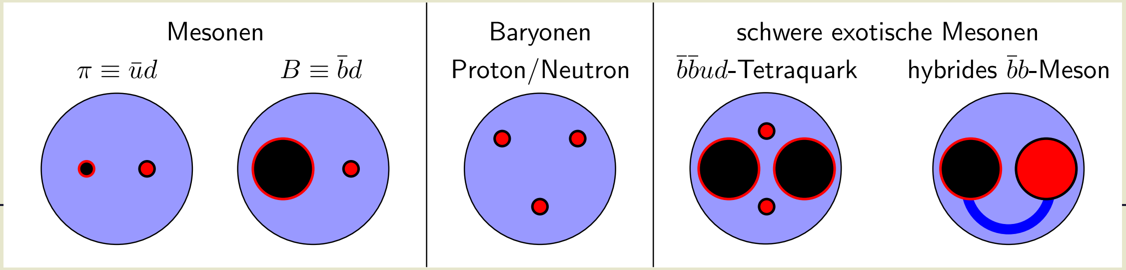
- **Gluonen** (Spin 1):
  - Masselose Austauschteilchen der QCD, vermitteln Kräfte zwischen Quarks.
  - Tragen selbst (Farb-)Ladung (im Gegensatz zu Photonen), was zu "eigenartigen" Phänomenen führt, insbesondere **Confinement**.



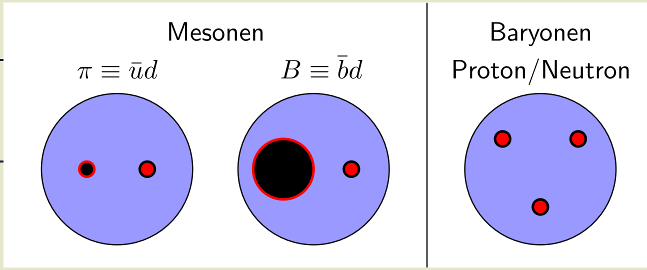
Confinement, Hadronen



- Quarks treten "niemals" isoliert auf ... "immer" in Gruppen ... meistens Zweier- oder Dreiergruppen, sogenannten **Hadronen** ($\rightarrow$ **Confinement**).
- **Hadronen**:
  - **Mesonen**: Ganzzahliger Spin, i.d.R. gebundene Quark-Antiquark-Paare.
    Beispiele: $\pi \equiv \bar{u}d$, $B \equiv \bar{b}d$, ...
    Exotische Mesonen im 2. Teil dieses Vortrags: $\bar{b}\bar{b}ud$-Tetraquarks, hybride $\bar{b}b$-Mesonen.
  - **Baryonen**: Halbzahliger Spin, i.d.R. drei gebundene Quarks oder Antiquarks.
    Beispiele: Proton $\equiv uud$, Neutron $\equiv udd$, ...
  - Hunderte von Mesonen und Baryonen in Experimenten beobachtet ("Teilchenzoo"), unterscheiden sich in
    - sechs Flavor-Möglichkeiten für jedes Quark/Antiquark (u, d, s, c, b, t),
    - Quantenzahlen ähnlich zum Wasserstoffatom (radiale Quantenzahl, Gesamtdrehimpuls J, Parität P, ...).



Definition von QCD



- Definition von QCD einfach:

$$S = \int d^4x \left(\sum_{f \in \{u,d,s,c,t,b\}} \bar{\psi}^{(f)} \Big(\gamma_\mu \Big(\partial_\mu - i A_\mu \Big) + m^{(f)} \Big) \psi^{(f)} + \frac{1}{2g^2} \mathrm{Tr} \Big(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Big) \right)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu].$$

- In QCD werden Teilchen durch Felder beschrieben:
  - $\psi^{(f)}(\mathbf{r}, t)$, $\bar{\psi}^{(f)}(\mathbf{r}, t)$: **Quarkfelder**.
  - $A_\mu(\mathbf{r}, t)$: **Gluonfeld**.
  - Wenn ein Feld am Raumpunkt $\mathbf{r}$ zum Zeitpunkt t oszilliert bzw. einen von 0 verschiedenen Wert aufweist, befindet sich bei $(\mathbf{r}, t)$ ein entsprechendes Teilchen.
- Keine analytischen Lösungen für z.B. Meson- oder Baryon-Massen, da
  - zugehörige Feldgleichungen nicht-linear,
  - kein kleiner Parameter (Kopplungskonstante) existiert (d.h. Störungstheorie i.A. nicht anwendbar).
- Numerische Methode erforderlich
  $\rightarrow$ **Gitter-QCD**.

Berechnung von Hadronmassen (1)

- Gitter-QCD-Bestimmung einer Hadronmasse in drei Schritten:

  (1) Konstruiere einen geeigneten Hadron-Erzeugungsoperator $\mathcal{O}$.

  (2) Berechne die zeitliche Korrelationsfunktion $C(t)$ des Hadron-Erzeugungsoperators $\mathcal{O}$ numerisch mit Hilfe von Gitter-QCD.

  (3) Bestimme die gesuchte Hadronmasse anhand des exponentiellen Abfalls der Korrelationsfunktion $C(t)$.

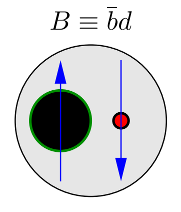
Berechnung von Hadronmassen (2)

Schritt (1): Konstruiere einen geeigneten Hadron-Erzeugungsoperator $\mathcal{O}$

- Ein Hadron-Erzeugungsoperator besteht i.W. aus Quark-Feldoperatoren $\psi^{(f)}(\mathbf{r}) \equiv u(\mathbf{r}), d(\mathbf{r}), s(\mathbf{r}), c(\mathbf{r}), b(\mathbf{r}), t(\mathbf{r})$.
- Der Quark-Feldoperator $u(\mathbf{r})$ platziert ein u-Quark am Raumpunkt $\mathbf{r}$, $d(\mathbf{r})$ platziert ein d-Quark, usw.
- Ein **geeigneter Hadron-Erzeugungsoperator** $\mathcal{O}$ erzeugt in **grober Approximation** das entsprechende Hadron und respektiert die Quantenzahlen des Hadrons:
  - Feinheiten sind dabei irrelevant.
  - **Die am Ende berechnete Hadronmasse ist unabhängig von diesen Feinheiten.**
  - **Beispiel:** B-**Meson**.
    - Besteht aus einem Quark-Antiquark-Paar $\bar{b}d$, hat Gesamtdrehimpuls $J = 0$, Parität $P = -$.
    - Möglicher Erzeugungsoperator für ruhendes B-Meson:

      $$\mathcal{O} \equiv \int d^3r \, \bar{b}(\mathbf{r}) \gamma_5 d(\mathbf{r})$$

      (γ_5 sorgt für $J^P = 0^-$, $\int d^3r$ für Impuls $\mathbf{p} = 0$).



Berechnung von Hadronmassen (3)

Schritt (2): Berechne die zeitliche Korrelationsfunktion $C(t)$ des Hadron-Erzeugungsoperators $\mathcal{O}$ numerisch mit Hilfe von Gitter-QCD

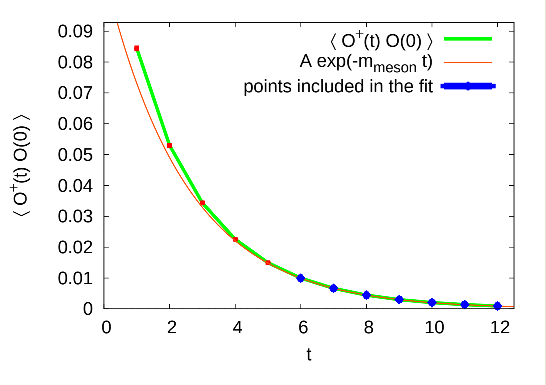
- **Korrelationsfunktion**: $C(t) \equiv \langle \Omega | \mathcal{O}^\dagger(t) \mathcal{O}(0) | \Omega \rangle$ $\quad$ ($|\Omega\rangle$ = Vakuum).
- Gitter-QCD technisch aufwändig:
  - Anspruchsvolle Computerprogramme müssen geschrieben werden ...
  - ... dann rechnen High-Performance-Computer mehrere Wochen oder Monate ...
  - ... mehr dazu auf den nächsten beiden Folien.

Schritt (3): Bestimme die gesuchte Hadronmasse anhand des exponentiellen Abfalls der Korrelationsfunktion $C(t)$

- Aus elementarer Quantenmechanik ergibt sich

$$C(t) \quad = \quad \langle \Omega | \mathcal{O}^\dagger(t) \mathcal{O}(0) | \Omega \rangle \quad \overset{t \to \infty}{\propto} \quad e^{-m_B t}.$$

- Fit von $Ae^{-m_B t}$ an die Gitter-QCD-Ergebnisse für $C(t)$ liefert die gesuchte Hadronmasse m_B.



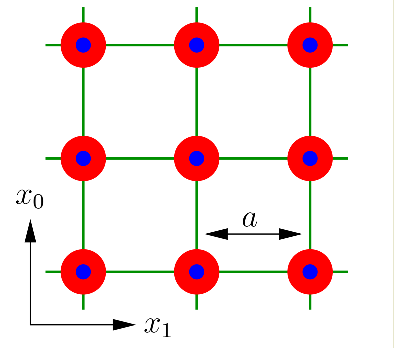
Gitter-QCD (1)

- **Ziel**: Numerische Berechnung von QCD-Observablen, z.B. einer zeitlichen Korrelationsfunktion und damit einer Mesonmasse.
- **Ausgangspunkt**: **Pfadintegralformulierung**,

$$C(t) \quad = \quad \langle \Omega | \mathcal{O}^\dagger(t) \mathcal{O}(0) | \Omega \rangle \quad = \quad \frac{1}{Z} \underbrace{\int \Big(\prod_f D\psi^{(f)} \, D\bar{\psi}^{(f)} \Big) DA_\mu}_{\text{Pfad- oder Funktionalintegral}} \ldots$$

  - $\int (\prod_f D\psi^{(f)} \, D\bar{\psi}^{(f)}) DA_\mu$ wird als **Pfadintegral** bezeichnet ...
  - ... ist ein Integral über alle denkbaren Quark- und Gluon-Feldkonfigurationen $\psi^{(f)}(\mathbf{r}, t)$ und $A_\mu(\mathbf{r}, t)$ ...
  - ... also ein Integral über einen ganzen Funktionenraum ...
  - ... an jedem der unendlich vielen Raumzeitpunkte $(\mathbf{r}, t)$ muss ein "normales Integral" über die Feldwerte $\psi^{(f)}(\mathbf{r}, t)$ und $A_\mu(\mathbf{r}, t)$ ausgeführt werden ...
  - ... **damit ein unendlich-dimensionales Integral.**

Gitter-QCD (2)



- Numerische Umsetzung des Pfadintegralformalismus:
  - Diskretisiere die Raumzeit mit einem kubischen Gitter mit hinreichend kleinem Gitterabstand $a \approx 0.05\,\mathrm{fm} \ldots 0.10\,\mathrm{fm}$ $\rightarrow$ **Kontinuumsphysik**.
  - Kompaktifiziere die Raumzeit mit hinreichend großer Ausdehnung $L \approx 2.0\,\mathrm{fm} \ldots 4.0\,\mathrm{fm}$ (4-dimensionaler Torus) $\rightarrow$ **Keine Finite-Size-Effekte**.
- Pfadintegral reduziert auf ordinäres endlich-dimensionales Integral,

$$\int \Big(\prod_f D\psi^{(f)}\, D\bar{\psi}^{(f)}\Big) DA_\mu \quad \rightarrow \quad \prod_{x_\nu \in \text{Gitter}} \Big(\prod_f d\psi^{(f)}(x_\nu)\, d\bar{\psi}^{(f)}(x_\nu)\Big) dU_\mu(x_\nu).$$

- Typische heutige Dimension eines QCD-Pfadintegrals:
  - x_ν: $32^4 \approx 10^6$ Gitterplätze.
  - $\psi = \psi_A^{a,(f)}$: 24 Quarkfreiheitsgrade ($\times 2$ (Anti-)Teilchen, $\times 3$ Farbe, $\times 4$ Spin), 2 Flavors.
  - $U_\mu = U_\mu^{ab}$: 32 Gluonfreiheitsgrade ($\times 8$ Farbe, $\times 4$ Spin).
  - Insgesamt: $32^4 \times (2 \times 24 + 32) \approx \mathbf{83 \times 10^6}$ dimensionales Integral.

$\rightarrow$ Speziell entwickelte stochastische Algorithmen erforderlich ($\rightarrow$ Fehlerbalken).
$\rightarrow$ Hochleistungscomputersysteme erforderlich ($\rightarrow$ Zusammenschluss zu Kollaborationen).

Ziele der Gitter-QCD

- Mit Gitter-QCD-Rechnungen verfolgt man eine Vielzahl von Zielen:
  - Verifikation bzw. Falsifikation von QCD durch Vergleich von Gitter-QCD-Resultaten mit experimentellen Messergebnissen (Suche nach bisher unbekannter Physik).
  - Vorhersagen von bisher nicht in Experimenten beobachteten Mesonen oder Baryonen ($\rightarrow$ wertvoller Input für Experimente).
    "Existiert ein $\bar{b}\bar{b}ud$-Tetraquark? Welche Masse hat es?"
  - Untersuchung der Struktur von Mesonen oder Baryonen.
    "Hat ein $\bar{b}\bar{b}ud$-Tetraquark eine Meson-Meson- oder eine Diquark-Antidiquark-Struktur?"
    "Wie ordnen sich die Gluonen im Inneren eines hybriden Mesons an?"
  - Auflösen von momentan existierenden Widersprüchen zwischen experimentellen Ergebnissen und theoretischen Modellrechnungen.
  - Berechnung von experimentell schwer bzw. nicht zugänglichen QCD-Observablen (z.B. QCD bei extremen Temperaturen).
  - ...

$(+)$ Keine Annahmen. Keine Näherungen. Kein Modell. Vollwertige QCD-Ergebnisse.

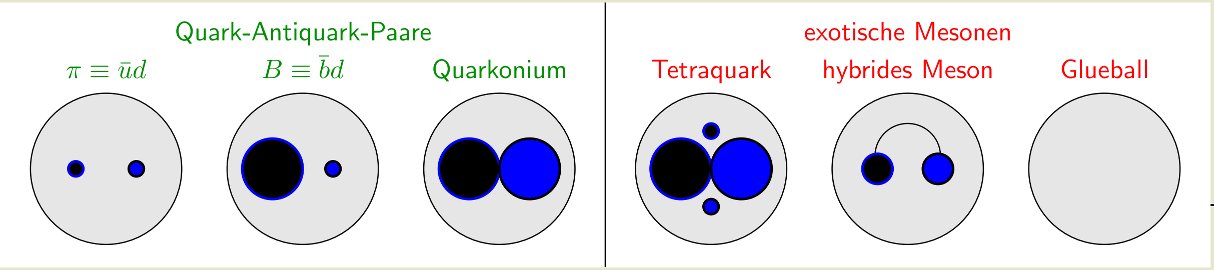
$(-)$ Zeitaufwändig ... Gitter-QCD-Projekte benötigen mehrere Jahre.

Teil 2: Gitter-QCD-Untersuchung von schweren exotischen Mesonen (in der Born-Oppenheimer-Approximation)

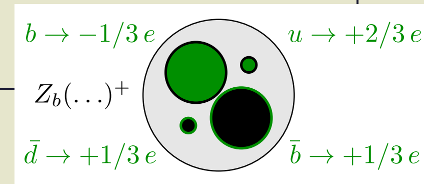
Exotische Mesonen (1)

- **Mesonen**: Gebundene Systeme von Quarks und Gluonen mit ganzzahligem Spin/Gesamtdrehimpuls $J = 0, 1, 2, \ldots$
- Die meisten Mesonen scheinen **Quark-Antiquark-Paare** zu sein (z.B. $\pi \equiv \bar{u}d$, $B \equiv \bar{b}d$):
  - Quark-Antiquark-Modellrechnungen liefern mit Experimenten konsistente Ergebnisse, z.B. für Mesonmassen.
- Einige Mesonen passen nicht ins Quark-Antiquark-Bild, ihre Quark-Zusammensetzung ist unklar:
  - Sie könnten eine abweichende Struktur besitzen, z.B.
    - **zwei Quarks und zwei Antiquarks (Tetraquark)**,
    - **ein Quark-Antiquark-Paar und Gluonen (hybrides Meson)**,
    - **nur Gluonen (Glueball)**.

$\rightarrow$ Man bezeichnet sie als **exotische Mesonen**.



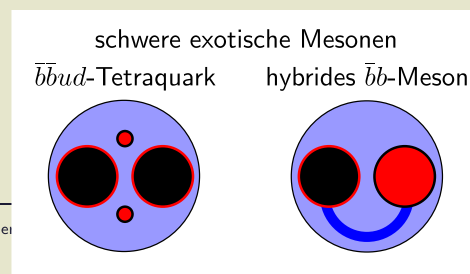
Exotische Mesonen (2)



- Experimentelle Beobachtungen von Tetraquarks:
  - Elektrisch geladene Mesonen $Z_b(10610)^+$ und $Z_b(10650)^+$: (2011)
    - Masse erfordert ein $b\bar{b}$-Paar.
    - $b\bar{b}$ ist elektrisch neutral ... woher kommt also die Ladung?
    - Im Tetraquark-Bild $Z_b(\ldots)^+ \equiv b\bar{b}u\bar{d}$ verständlich ($u \to +2/3\,e$, $\bar{d} \to -1/3\,e$).
  - $T_{cc} = \bar{c}\bar{c}ud$ mit Isospin $I = 0$ und Gesamtdrehimpuls/Parität $J^P = 1^+$: (2021)
    - Masse minimal unterhalb des leichtesten Meson-Meson-Thresholds (DD^*).
    - Das langlebigste bisher beobachtete exotische Hadron.

  [R. Aaij *et al.* [LHCb], Nature Phys. **18**, 751-754 (2022) [arXiv:2109.01038]].

- **In diesem Vortrag ausschließlich schwere exotische Mesonen**:
  - Tetraquarks $\bar{b}\bar{b}qq$
    (light quarks $q \in \{u, d, s\}$; enthalten die "b-Quark-Version" des oben genannten T_{cc}),
  - hybride Mesonen $\bar{b}b$ + Gluonen.



Zwei theoretische Herangehensweisen

- Zwei mögliche theoretische Herangehensweisen, um **schwere** exotische Mesonen mit Gitter-QCD zu studieren:
  - **Gitter-QCD-Berechnung der Eigenwerte des QCD-Hamiltonian**:
    * Massen stabiler Hadronen entsprechen Energie-Eigenwerten im unendlichen Volumen (vergleichsweise einfach).
    * Massen und Zerfallsbreiten von Resonanzen können aus Volumenabhängigkeit der Energie-Eigenwerte berechnet werden (schwierig).

    $\rightarrow$ **Nicht Teil dieses Vortrags.**
    (notwendig für numerische Präzisionsergebnisse, aber sehr technisch)
  - **Born-Oppenheimer-Approximation** (besteht aus zwei Schritten):
    (1) Berechne Potential $V(r)$ der beiden schweren Quarks in Anwesenheit von zwei leichten Quarks und/oder Gluonen mit Hilfe von Gitter-QCD.
    $\rightarrow$ Vollwertige QCD-Resultate.
    (2) Benutze Standardtechniken aus Quantenmechanik sowie $V(r)$, um Dynamik der beiden schweren Quarks zu studieren (Schrödinger-Gleichung).
    $\rightarrow$ Eine Approximation.

    $\rightarrow$ **Wird im weitern Verlauf des Vortrags diskutiert.**
    (enthält Approximationen, aber man versteht die zugrunde liegende Physik)

Teil 2a: Tetraquarks $\bar{b}\bar{b}qq$

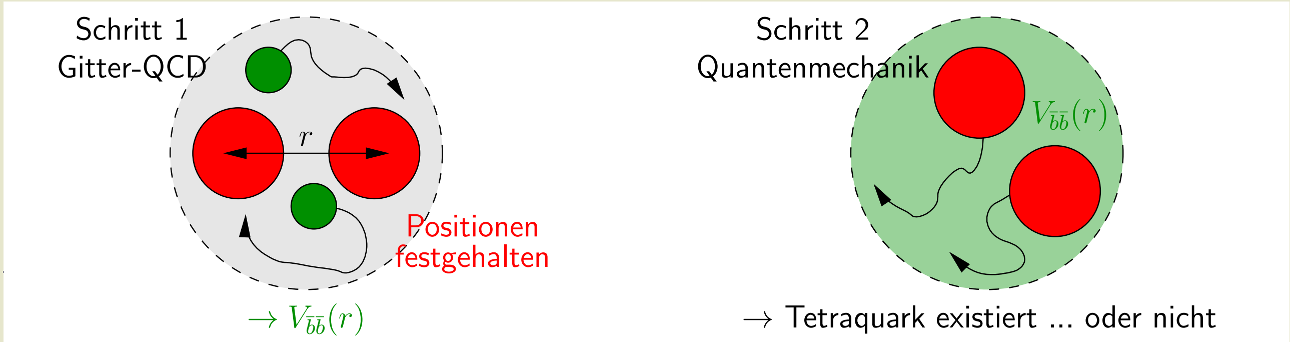
Born-Oppenheimer-Approximation

- **Grundidee**: Untersuche Existenz von schweren $\bar{b}\bar{b}qq$-Tetraquarks in zwei Schritten.

(BO1) **Berechne Potentiale $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$ von zwei schweren Antiquarks ($\bar{b}\bar{b}$) in Anwesenheit von zwei leichteren Quarks (qq, $q \in \{u, d, s\}$) mit Hilfe von Gitter-QCD.**

(BO2) **Prüfe, ob diese Potentiale hinreichend stark attraktiv sind, um gebundene Zustände/Resonanzen zu beherbergen** ($\rightarrow$ entsprechen $\bar{b}\bar{b}qq$-Tetraquarks)**, durch Lösen entsprechender Schrödinger-Gleichungen.**

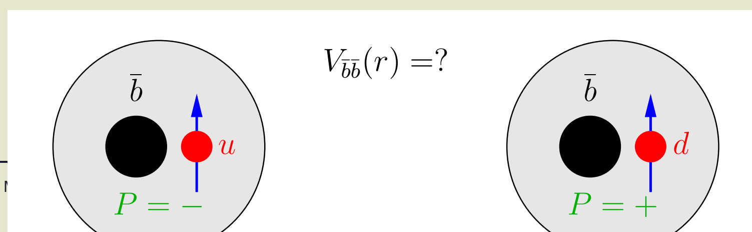
- (1) + (2) $\rightarrow$ **Born-Oppenheimer-Approximation**:
  - Entwickelt 1927 für Molekül- bzw. Festkörperphysik.
    [M. Born, R. Oppenheimer, "Zur Quantentheorie der Molekeln," Annalen der Physik 389, Nr. 20, 1927]
  - Schritt (1) im Folgenden aber nicht Quantenmechanik, sondern (Gitter-)QCD.
  - Sinnvolle Approximation, da $m_q \ll m_b$ ($\bar{b}$-Quarks ruhen aus Sicht der leichten Quarks).



BO1: $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale (1)

- Große $\bar{b}\bar{b}$-Separationen r: Die vier Quarks bilden zwei B-Mesonen ($B = \bar{b}q$).
  $\rightarrow$ Interpretation von $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$ als $\bar{b}\bar{b}qq$-Potentiale oder als BB-Potentiale, je nach Wert von r.
- Spins der schweren $\bar{b}$-Quarks nahezu irrelevant (Analogie: Hyperfeinaufspaltung beim H-Atom).
- Betrachte zwei Sorten von B-Mesonen, mit Parität
  - $P = -$ (pseudoskalare/Vektor-Mesonen, $B \approx B^*$),
  - $P = +$ (skalare/Pseudovektor-Mesonen, $B_0^* \approx B_1^*$, etwa 400 MeV schwerer als B, B^*).
- Berechne $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$ in Abhängigkeit von
  - leichten Quark-Flavors (für Isospin $I = 0$ $[ud - du]$ und $I = 1$ $[uu\ ,\ dd\ ,\ ud + du]$),
  - leichten Quark-Spins (für Spin $j = 0$ $[\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow]$ und $j = 1$ $[\uparrow\uparrow\ ,\ \downarrow\downarrow\ ,\ \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow]$),
  - Parität.

$\rightarrow$ Zahlreiche Potentiale, manche attraktiv, andere repulsiv, unterschiedliche Asymptoten, ...



BO1: $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale (2)

- Gitter-QCD-Berechnung der $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$ wie in Teil 1 dieses Vortrags diskutiert.

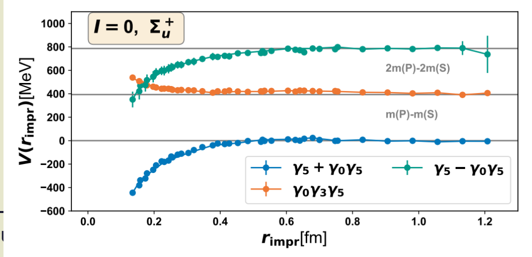
  (1) Verwende $\bar{b}\bar{b}qq$-Erzeugungsoperatoren

  $$\mathcal{O}_{BB} \quad = \quad (\mathcal{C}\Gamma)_{AB}(\mathcal{C}\tilde{\Gamma})_{CD} \underbrace{\Big(\bar{b}_C(-\mathbf{r}/2) q_A^{(1)}(-\mathbf{r}/2)\Big)}_{=B\text{-Meson}} \underbrace{\Big(\bar{b}_D(+\mathbf{r}/2) q_B^{(2)}(+\mathbf{r}/2)\Big)}_{=B\text{-Meson}} .$$

  * Leichte Quark-Flavors:
    $qq = ud - du \quad \rightarrow \quad$ Isospin $I = 0$;
    $qq = uu \ , \ dd \ , \ ud + du \rightarrow$ Isospin $I = 1$.
  * Γ: 4×4-Matrix, eine Kombination aus γ-Matrizen (bekannt aus Dirac-Gleichung) $\rightarrow \quad$ Spin und Parität.

  (2) Berechne zeitliche Korrelationsfunktionen (für $I = 0, 1$, alle unabhängigen Γ's [16 Möglichkeiten], zahlreiche r).

  (3) Extrahiere $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$ anhand des exponentiellen Abfalls der Korrelationsfunktionen.



Gitter-QCD-Setup

- Erster Schritt jeder Gitter-QCD-Rechnung: Erzeugen einer repräsentativen Menge von Feldkonfigurationen, die das QCD-Pfadintegral approximieren.
  $\rightarrow$ Sehr rechenzeitaufwändig, aber Feldkonfigurationen universell verwendbar.

- Großteil der publizierten Ergebnisse auf **ETMC-Eichlinkkonfigurationen** berechnet:
  - $N_f = 2$ dynamische Quark-Flavors, Gitterabstand $a \approx 0.079\,\text{fm}$.
  - $24^3 \times 48$, d.h. räumliche Gitterausdehnung $\approx 1.90\,\text{fm}$.
  - Drei Pion-Massen $m_\pi \approx 340\,\text{MeV}$, $m_\pi \approx 480\,\text{MeV}$, $m_\pi \approx 650\,\text{MeV}$.

  [R. Baron *et al.* [ETM Collaboration], JHEP **1008**, 097 (2010) [arXiv:0911.5061]

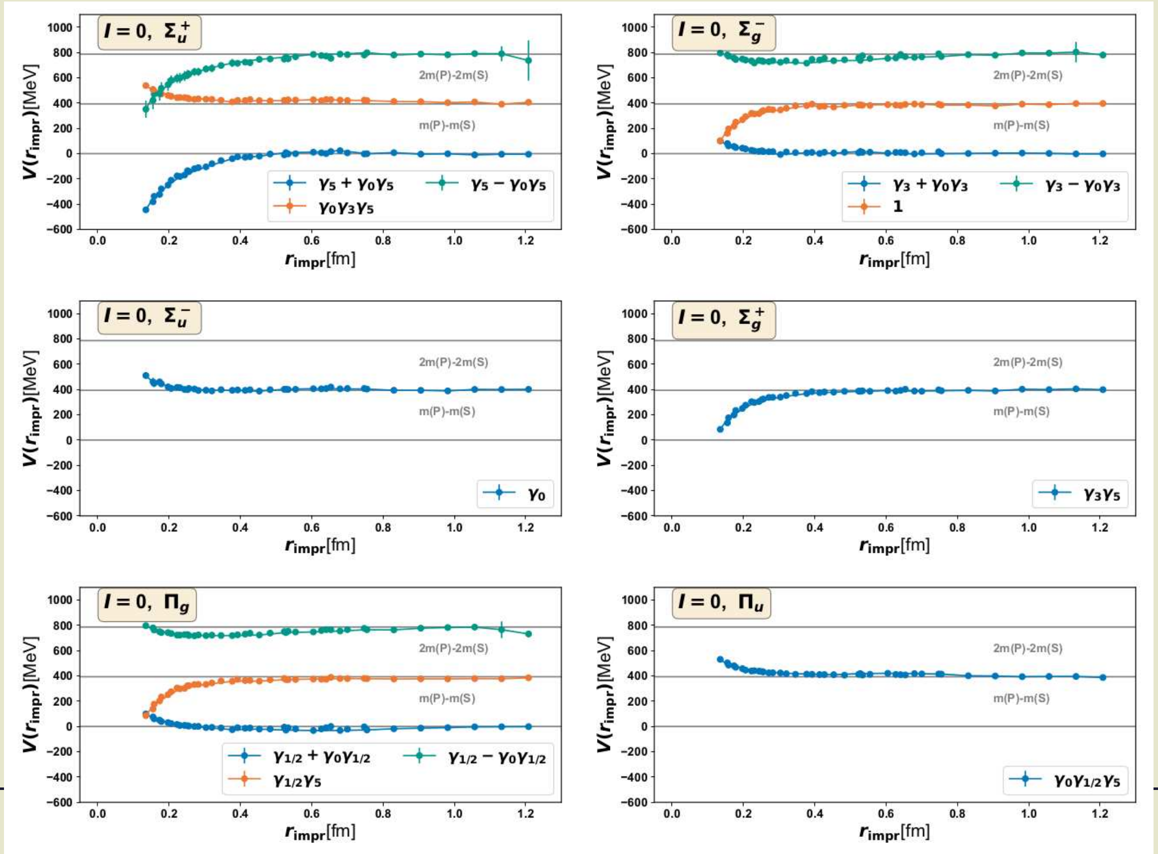
- Aktuelle Rechnungen auf **CLS-Eichlinkkonfigurationen**:
  - $N_f = 2$ dynamische Quark-Flavors, Gitterabstand $a \approx 0.0749\,\text{fm}$.
  - $32^3 \times 64$, d.h. räumliche Gitterausdehnung $\approx 2.42\,\text{fm}$.
  - Pion-Masse $m_\pi \approx 331\,\text{MeV}$.

  [P. Fritzsch, F. Knechtli, B. Leder, M. Marinkovic, S. Schaefer, R. Sommer, F. Virotta, Nucl. Phys. B **865**, 397-429 (2012) [arXiv:1205.5380]]

  [G. P. Engel, L. Giusti, S. Lottini and R. Sommer, Phys. Rev. D **91**, no. 5, 054505 (2015) [arXiv:1411.6386]]

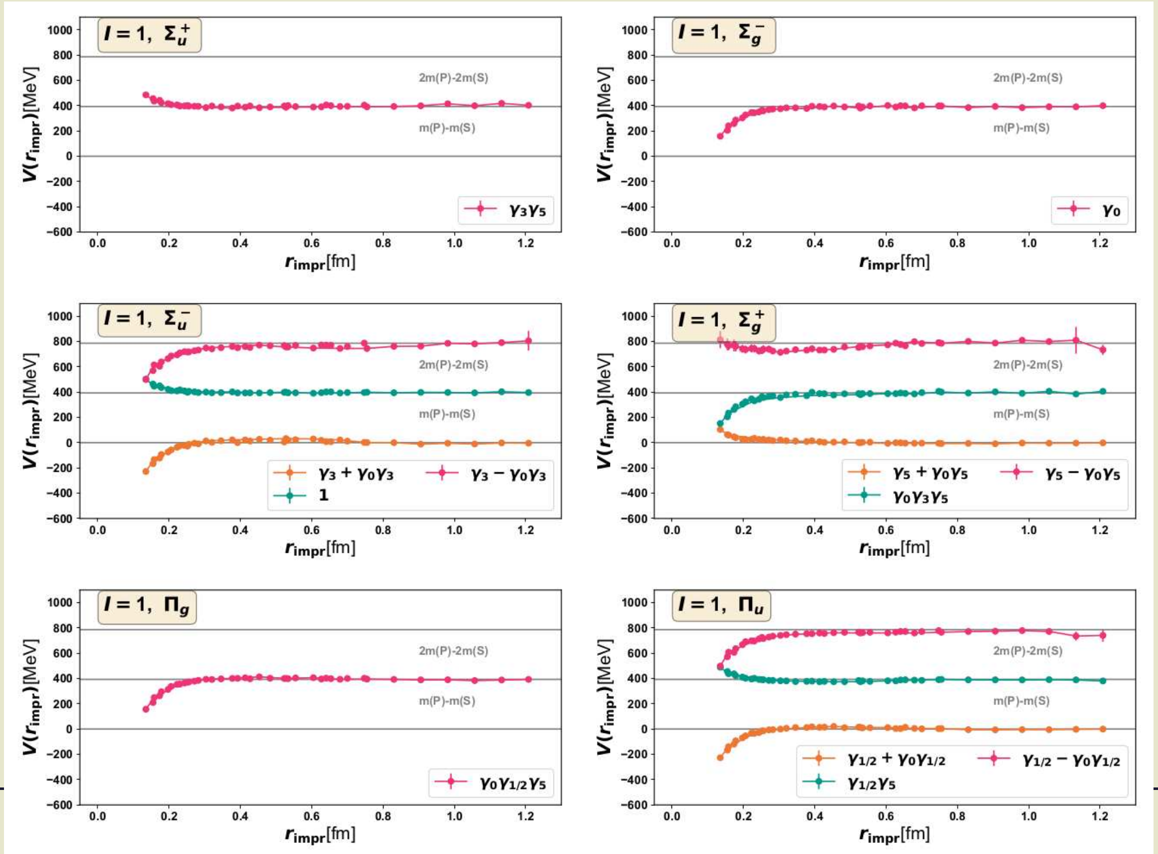
BO1: $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale (3)

[P. Bicudo, M. Marinkovic, L. Müller, M.W. unpublished ongoing work]



BO1: $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale (4)

[P. Bicudo, M. Marinkovic, L. Müller, M.W. unpublished ongoing work]



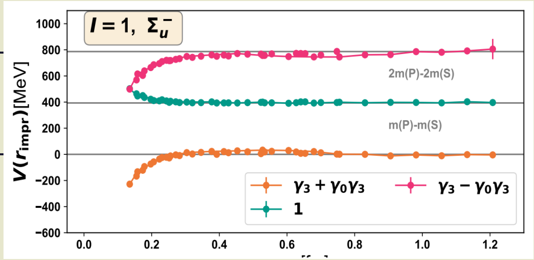
BO1: $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale (5) to (8)

- Damit $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale mit einem "Computerexperiment" vermessen.
- Gitter-QCD-Rechnungen liefern i.d.R. kein tiefes physikalisches Verständnis.

$\rightarrow$ Im Folgenden zusätzliche theoretische Überlegungen, um drei Fragen zu beantworten.

- **Warum drei unterschiedliche asymptotische Werte der Potentiale?**
  - Asymptoten zeigen $B^{(*)}B^{(*)}$-Potentiale, $B^{(*)}B^*_{0,1}$-Potentiale und $B^*_{0,1}B^*_{0,1}$-Potentiale an.
- **Warum sind einige Potentiale attraktiv, andere repulsiv?**
  - $(I = 0, j = 0)$ and $(I = 1, j = 1)$ $\quad\rightarrow\quad$ attraktives $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potential.
  - $(I = 0, j = 1)$ and $(I = 1, j = 0)$ $\quad\rightarrow\quad$ repulsives $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potential.
  - Pauli-Prinzip und Annahme von "1-Gluon-Austausch" bei kleinen r erklärt, warum einige Potentiale attraktiv sind, andere repulsiv.
- **Warum 24 nicht-degenerierte $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale? Übersichtliche Klassifizierung möglich?**
  - 64 Erzeugungsoperatoren, 2-fache/3-fache Entartung aufgrund von Spin/Isospin
    $\rightarrow$ 24 nicht-degenerierte $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale.

BO1: $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-... (5)



Warum drei unterschiedliche asymptotische Werte der Potentiale?

- Differenzen zwischen Asymptoten $\approx 400\,$MeV ... entspricht der Massendifferenz von $B^{(*)}$ $(P = -)$ und $B^*_{0,1}$ $(P = +)$.
- **Legt nahe, dass Asymptoten $B^{(*)}B^{(*)}$-Potentiale, $B^{(*)}B^*_{0,1}$-Potentiale und $B^*_{0,1}B^*_{0,1}$-Potentiale anzeigen.**
- Kann durch Umschreiben der $\bar{b}\bar{b}qq$-Erzeugungsoperatoren in Meson-Meson-Erzeugungsoperatoren bestätigt werden (Fierz-Transformation).
- Beispiel: uu, $\Gamma = (\gamma_3 + \gamma_0\gamma_3)$ (attraktiv, niedrigste Asymptote),

$$\Big(C(\gamma_3 + \gamma_0\gamma_3)\Big)_{AB}\Big(\bar{Q}_C(-\mathbf{r}/2)q_A^{(u)}(-\mathbf{r}/2)\Big)\Big(\bar{Q}_D(+\mathbf{r}/2)q_B^{(u)}(+\mathbf{r}/2)\Big) \quad \propto$$
$$\propto \quad (B^{(*)})_\uparrow(B^{(*)})_\downarrow + (B^{(*)})_\downarrow(B^{(*)})_\uparrow.$$

- Beispiel: uu, $\Gamma = 1$ (repulsiv, mittlere Asymptote),

$$\Big(C1\Big)_{AB}\Big(\bar{Q}_C(-\mathbf{r}/2)q_A^{(u)}(-\mathbf{r}/2)\Big)\Big(\bar{Q}_D(+\mathbf{r}/2)q_B^{(u)}(+\mathbf{r}/2)\Big) \quad \propto$$
$$\propto \quad (B^{(*)})_\uparrow(B^*_{0,1})_\downarrow - (B^{(*)})_\downarrow(B^*_{0,1})_\uparrow + (B^*_{0,1})_\uparrow(B^{(*)})_\downarrow - (B^*_{0,1})_\downarrow(B^{(*)})_\uparrow.$$

BO1: $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale (6)

Warum sind einige Potentiale attraktiv, andere repulsiv? (1)

- Wellenfunktionen ununterscheidbarer Fermionen müssen antisymmetrisch sein (Pauli-Prinzip).
  - In Quantenfeldtheorie/QCD automatisch realisiert (im Gegensatz zur Quantenmechanik).
  - Leichte Quarks qq:
    - Isospin: $I = 0$ antisymmetrisch $(ud - du)$, $I = 1$ symmetric $(uu \ , \ dd \ , \ ud - du)$.
    - Spin: $j = 0$ antisymmetrisch $(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$, $j = 1$ symmetric $(\uparrow\uparrow \ , \ \downarrow\downarrow \ , \ \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$.
    - Farbe:
      - $(I = 0, j = 0)$ und $(I = 1, j = 1)$: Muss antisymmetrisch sein, Triplet $\bar{3}$.
      - $(I = 0, j = 1)$ und $(I = 1, j = 0)$: Muss symmetrisch sein, Sextet 6.
- Die vier Quarks $\bar{b}\bar{b}qq$ müssen ein Farb-Singlet bilden ("farbneutraler Zustand"):
  - qq in einem Farb-Triplet $\bar{3}$ $\quad \rightarrow \quad$ $\bar{b}\bar{b}$ ebenfalls in einem Farb-Triplet 3.
  - qq in einem Farb-Sextet 6 $\quad \rightarrow \quad$ $\bar{b}\bar{b}$ ebenfalls in einem Farb-Sextet $\bar{6}$.

BO1: $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale (7)

Warum sind einige Potentiale attraktiv, andere repulsiv? (2)

- Annahme: Attraktives/repulsives Verhalten von $\bar{b}\bar{b}$ bei kleinen Abständen r im Wesentlichen durch 1-Gluon-Austausch:

  $\rightarrow$ Farb-Triplet 3 entspricht attraktivem Potential, $V_{\bar{b}\bar{b}}(r) \approx -2\alpha_s/3r$.

  $\rightarrow$ Farb-Sextet $\bar{6}$ entspricht repulsivem Potential, $V_{\bar{b}\bar{b}}(r) \approx +\alpha_s/3r$.

  (Vergleichsweise einfach in führender Ordnung in Störungstheorie berechenbar [typische Übungsaufgabe in Quantenfeldtheorie-Vorlesungen]).

- Insgesamt:
  - $(I = 0, j = 0)$ und $(I = 1, j = 1)$ $\rightarrow$ attraktives $\bar{b}\bar{b}$-Potential $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$.
  - $(I = 0, j = 1)$ und $(I = 1, j = 0)$ $\rightarrow$ repulsives $\bar{b}\bar{b}$-Potential $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$.

- Diese Erwartungen spiegeln sich perfekt in den numerischen Gitter-QCD-Ergebnissen wider.

- **Pauli-Prinzip und Annahme von “1-Gluon-Austausch” bei kleinen r erklärt, warum einige Potentiale attraktiv sind, andere repulsiv.**

BO1: $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale (8)

Warum 24 nicht-degenerierte $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale? Übersichtliche Klassifizierung möglich?

- Insgesamt $16 \times 4 = 64$ unterschiedliche Erzeugungsoperatoren:

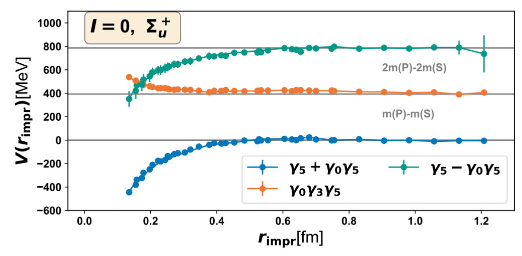
$$\mathcal{O}_{BB} \equiv (\mathcal{C}\Gamma)_{AB}(\mathcal{C}\tilde{\Gamma})_{CD} \underbrace{\Big(\bar{b}_C(-\mathbf{r}/2)q_A^{(1)}(-\mathbf{r}/2)\Big)}_{=B\text{-Meson}} \underbrace{\Big(\bar{b}_D(+\mathbf{r}/2)q_B^{(2)}(+\mathbf{r}/2)\Big)}_{=B\text{-Meson}} .$$

$B^{(*)}B^{(*)}$-Potentiale:	attraktiv:	$1 \oplus 3 \oplus 6$	(10 Erzeugungsoperatoren).
	repulsiv:	$1 \oplus 3 \oplus 2$	(6 Erzeugungsoperatoren).
$B^{(*)}B^{*}_{0,1}$-Potentiale:	attraktiv:	$1 \oplus 1 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 6$	(16 Erzeugungsoperatoren).
	repulsiv:	$1 \oplus 1 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 6$	(16 Erzeugungsoperatoren).
$B^{*}_{0,1}B^{*}_{0,1}$-Potentiale:	attraktiv:	$1 \oplus 3 \oplus 6$	(10 Erzeugungsoperatoren).
	repulsiv:	$1 \oplus 3 \oplus 2$	(6 Erzeugungsoperatoren).

  - 2-fache Entartung für Spin $j_z = \pm 1$.
  - 3-fache Entartung für Isospin $I = 1$, $I_z = -1, 0, +1$.

$\rightarrow$ 24 **nicht-degenerierte $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentiale.**

BO2: stabile $\bar{b}\bar{b}qq$-Tetraquarks



- Löse Schrödinger-Gleichung für Relativkoordinate $\mathbf{r}$ der beiden $\bar{b}$-Quarks,

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\triangle + V_{\bar{b}\bar{b}}(r)\right)\psi(\mathbf{r}) \quad = \quad E\psi(\mathbf{r}) \quad , \quad \mu \quad = \quad m_b/2.$$

- Gegebenenfalls existierende gebundene Zustände, d.h. Zustände mit $E < 0$, zeigen $\bar{b}\bar{b}qq$-Tetraquarks an.

- Ein gebundener Zustand für spezielles Potential $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$ und leichte Quarks $qq = ud - du$:
  - $\bar{b}\bar{b}ud$-Tetraquark, Bindungsenergie $E = -93^{+47}_{-43}\,\mathrm{MeV}$.
  - Quantenzahlen: $I(J^P) = 0(1^+)$. (wie beim experimentell beobachteten T_{cc}-Tetraquark)

  $\rightarrow$ **Vorhersage eines Tetraquarks.** (aktuell keine experimentellen Ergebnisse zu $\bar{b}\bar{b}qq$)
  [P. Bicudo, M.W., Phys. Rev. D **87**, 114511 (2013) [arXiv:1209.6274]]
  [P. Bicudo, K. Cichy, A. Peters, M.W., Phys. Rev. D **93**, 034501 (2016) [arXiv:1510.03441]]

- Sonst keine Bindungszustände, auch nicht für $qq = ss$.

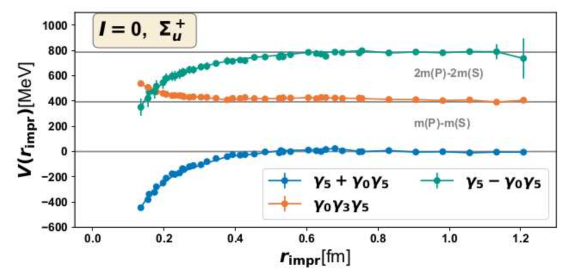
- Potentiale für $qq = us$ nicht berechnet ... aber starke theoretische Evidenz für Existenz eines weiteren stabilen $\bar{b}\bar{b}us$-Tetraquarks mit $J^P = 1^+$.
  [A. Francis, R. J. Hudspith, R. Lewis, K. Maltman, Phys. Rev. Lett. 118, 142001 (2017) [arXiv:1607.05214]]

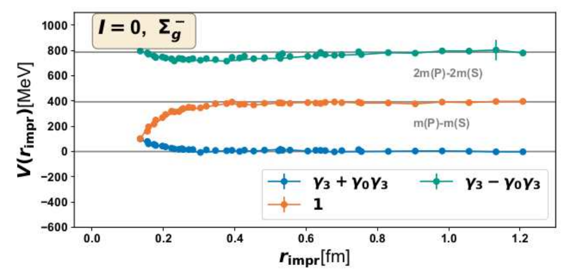
Berücksichtigung der Spins der $\bar{b}$-Quarks

- Bis jetzt b-Quarks als statische Quarks ($=$ unendlich schwere Quarks) genähert.
- $\bar{b}\bar{b}qq$-$/BB$-Potentiale damit unabhängig vom Spin der statischen Quarks.
- Erwartete Größenordnung der Effekte der Spins der $\bar{b}$-Quarks: $\mathcal{O}(m_{B^*} - m_B) = \mathcal{O}(45\,\text{MeV})$.
- In [P. Bicudo, J. Scheunert, M.W., Phys. Rev. D **95**, 034502 (2017) [arXiv:1612.02758]] in grober Weise berücksichtigt in Form einer gekoppelten Schrödinger-Gleichung mit zwei Kanälen,
  BB^*-**Kanal** und B^*B^*-**Kanal**.
  Erfordert Hinzunahme eines weiteren repulsiven $\bar{b}\bar{b}qq$-$/BB$-Potentials (rechtes Bild, blau) und benötigt das experimentelle Ergebnis $m_{B^*} - m_B \approx 45\,\text{MeV}$ als Input.

$\rightarrow$ **Bindungsenergie reduziert sich von etwa $90\,\text{MeV}$ auf etwa $60\,\text{MeV}$.**

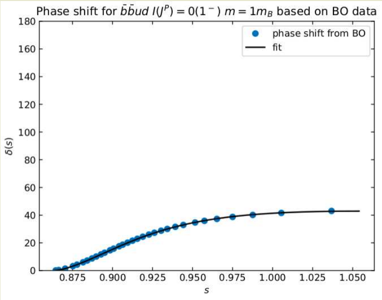
$\rightarrow$ Physikalische Erklärung: Das weiter oben isoliert betrachtete attraktive Potential (linkes Bild, blau) entspricht nicht nur einem leichteren BB^*-Paar, sondern hat auch einen ähnlich großen Beitrag von einem schwereren B^*B^*-Paar.

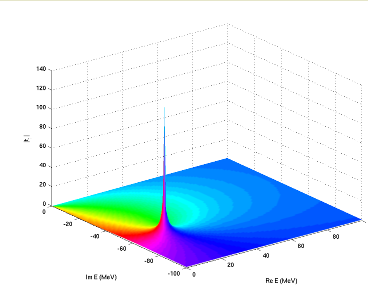




Existieren $\bar{b}\bar{b}qq$-Tetraquark-Resonanzen?

- In
  [P. Bicudo, M. Cardoso, A. Peters, M. Pflaumer, M.W., Phys. Rev. D **96**, 054510 (2017) [arXiv:1704.02383]]
  Resonanzen studiert mit Techniken der quantenmechanischen Streutheorie.
- **Dabei Spins der b-Quarks ignoriert**.





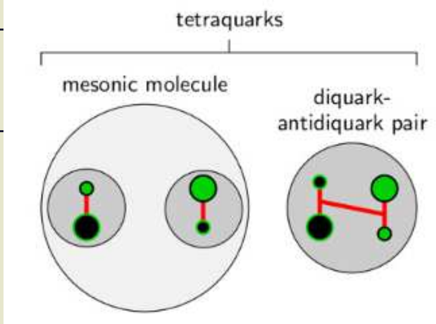
$\rightarrow$ Anzeichen für Existenz einer $\bar{b}\bar{b}ud$-Tetraquark-Resonanz mit $I(J^P) = 0(1^-)$, $E = 17^{+4}_{-4}$ MeV oberhalb des BB-Thresholds, Zerfallsbreite $\Gamma = 112^{+90}_{-103}$ MeV.

- In
  [J. Hoffmann, A. Zimermmane-Santos and M.W., PoS **LATTICE2022**, 262 (2023) [arXiv:2211.15765]]
  Spins der b-Quarks berücksichtigt.
  (mit Techniken wie auf vorausgegangener Folie diskutiert)

$\rightarrow$ $\bar{b}\bar{b}ud$-Tetraquark-Resonanz nicht mehr existent.

$\rightarrow$ Physikalische Erklärung: Das relevante attraktive Potential entspricht nicht nur einem leichteren BB-Paar, sondern hat einen deutlich größeren Beitrag von einem schwereren B^*B^*-Paar.

Struktur des $\bar{b}\bar{b}ud$-Tetraquarks



- Ist das stabile $\bar{b}\bar{b}ud$-Tetraquark ein Meson-Meson-Paar (BB) oder ein Diquark-Antidiquark-Paar (Dd)?
  - Verwende zwei Erzeugungsoperatoren,

$$\mathcal{O}_{BB} \propto (\mathcal{C}\Gamma)_{AB}(\mathcal{C}\tilde{\Gamma})_{CD} \underbrace{\Big(\bar{b}_C(-\mathbf{r}/2)q_A^{(1)}(-\mathbf{r}/2)\Big)}_{=B\text{-Meson}} \underbrace{\Big(\bar{b}_D(+\mathbf{r}/2)q_B^{(2)}(+\mathbf{r}/2)\Big)}_{=B\text{-Meson}}$$

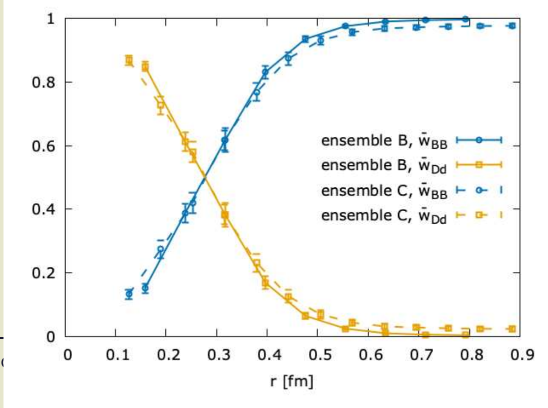
$$\mathcal{O}_{Dd} \propto \underbrace{\epsilon^{abc}\Big(q_A^{(1),b}(\mathbf{z})(\mathcal{C}\Gamma)_{AB}q_B^{(2),c}(\mathbf{z})\Big)}_{=\text{leichtes Diquark}} \underbrace{\epsilon^{ade}\Big(\bar{b}_C^f(-\mathbf{r}/2)U^{fd}(-\mathbf{r}/2;\mathbf{z})(\mathcal{C}\tilde{\Gamma})_{CD}\bar{b}_D^g(+\mathbf{r}/2)U^{ge}(+\mathbf{r}/2;\mathbf{z})\Big)}_{=\text{schweres Antidiquark}}$$

  und vergleiche deren Beiträge zum $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potential.
  [P. Bicudo, A. Peters, S. Velten, M.W., Phys. Rev. D **103**, 114506 (2021) [arXiv:2101.00723]]

→ $r \lesssim 0.2\,\text{fm}$: **Diquark-Antidiquark-Dominanz**.

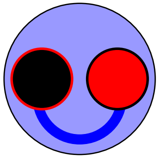
→ $0.5\,\text{fm} \lesssim r$: **Meson-Meson-System**.

→ **Integration über r, gewichtet mit radialer Aufenthaltswahrscheinlichkeit** (→ Wellenfunktion) **liefert Zusammensetzung des Tetraquarks:**
$\%BB \approx 60\%$, $\%Dd \approx 40\%$.



Teil 2b: Hybride Mesonen $\bar{b}b + $ Gluonen

BO1: hybride $\bar{b}b$-Potentiale (1)

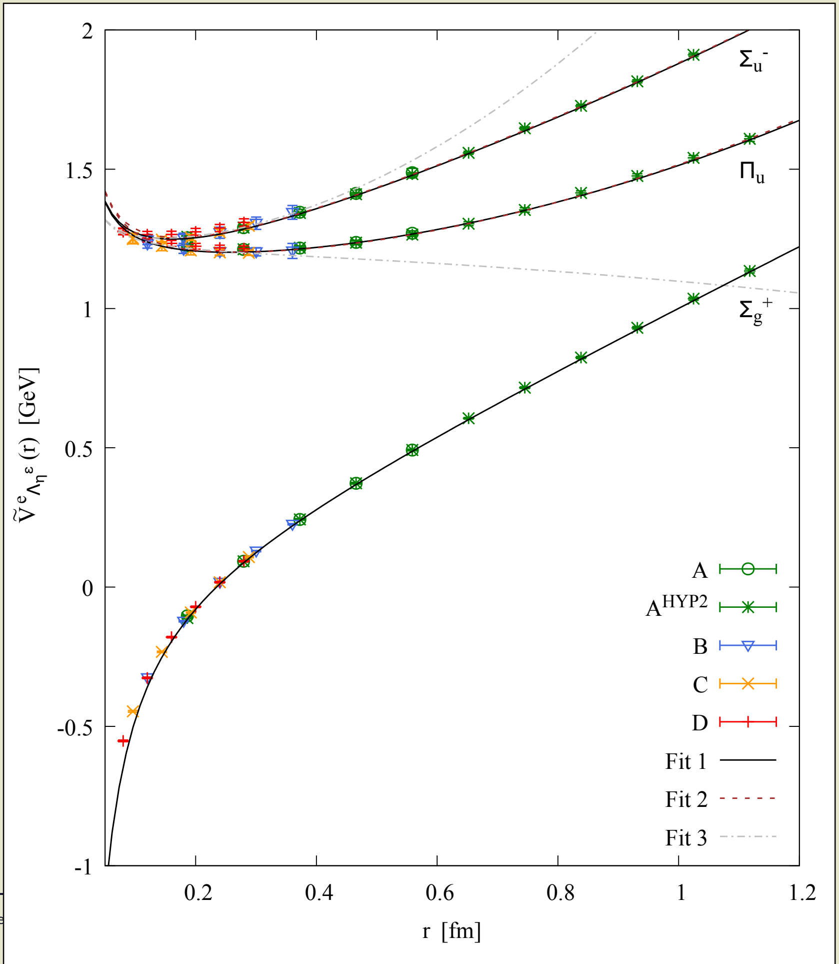


- Nun schwere hybride Mesonen, d.h. $\bar{b}b +$ Gluonen, ebenfalls in der Born-Oppenheimer-Approximation.
- Gluonen bilden nicht-triviale Strukturen und tragen so zu den Quantenzahlen bei, bei hybriden $\bar{b}b$-Potentialen
  - Bahndrehimpuls bezüglich der $\bar{b}b$-Separationsachse, $\Lambda = 0, 1, 2, \ldots \equiv \Sigma, \Pi, \Delta, \ldots$,
  - Parität kombiniert mit Ladungskonjugation, $\eta = +, - = g, u$,
  - Spiegelung senkrecht zur $\bar{b}b$-Separationsachse, $\epsilon = +, -$.
- Das gewöhnliche (nicht-hybride) $\bar{b}b$-Potential hat Quantenzahlen $\Lambda_\eta^\epsilon = \Sigma_g^+$.
- Von speziellem Interesse: die niedrigsten beiden hybriden Potentiale mit $\Lambda_\eta^\epsilon = \Pi_u, \Sigma_u^-$. (mit diesen Potentialen die besten Chancen, Kontakt zu Experimenten herzustellen)
- References:

[K. J. Juge, J. Kuti, C. J. Morningstar, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **63**, 326 (1998) [hep-lat/9709131]
...
[P. Bicudo, N. Cardoso, M. Cardoso, Phys. Rev. D **98**, 114507 (2018) [arXiv:1808.08815 [hep-lat]]]

BO1: hybride $\bar{b}b$-Potentiale (2)

- [C. Schlosser, M.W., Phys. Rev. D **105**, 054503 (2022) [arXiv:2111.00741]]



BO2: hybride $\bar{b}b$-Mesonen

- Löse radiale Schrödinger-Gleichung für Relativkoordinate r der beiden $\bar{b}$-Quarks mit den eben gezeigten hybriden Potentialen,

$$\bigg(-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{L(L+1) - 2\Lambda^2 + J_{\Lambda_\eta^\epsilon}(J_{\Lambda_\eta^\epsilon}+1)}{2\mu r^2} + V_{\Lambda_\eta^\epsilon}(r)\bigg)u_{\Lambda_\eta^\epsilon;L,n}(r) \quad = \quad E_{\Lambda_\eta^\epsilon;L,n}u_{\Lambda_\eta^\epsilon;L,n}(r).$$

  Energieeigenwerte $E_{\Lambda_\eta^\epsilon;L,n}$ sind grobe Approximationen für Massen von hybriden $\bar{b}b$-Mesonen.
  [E. Braaten, C. Langmack, D. H. Smith, Phys. Rev. D **90**, 014044 (2014) [arXiv:1402.0438]]
  [M. Berwein, N. Brambilla, J. Tarrus Castella, A. Vairo, Phys. Rev. D **92**, 114019 (2015) [arXiv:1510.04299]]
  [R. Oncala, J. Soto, Phys. Rev. D **96**, 014004 (2017) [arXiv:1702.03900]]

- Es existieren Spektrumsberechnungen für hybride $\bar{b}b$-Mesonen, aber deren Bedeutung ist weniger klar als z.B. beim vorher diskutierten $\bar{b}\bar{b}ud$-Tetraquark-Fall:
  - Keine klaren experimentellen Kandidaten für hybride $\bar{b}b$-Mesonen.
  - Gleiche Quantenzahlen für Multi-Hadron-Zustände (z.B. Quarkonium + Pion(en)) und Tetraquarks.
  - Spin- und $1/m_b$-Korrekturen fehlen (Gegenstand aktueller Forschung).
    [N. Brambilla, G. Krein, J. Tarrus Castella, A. Vairo, Phys. Rev. D **97**, 016016 (2018) [arXiv:1707.09647]]
    ...

Hybride Flussschläuche (1)

- Berechne mit Gittereichtheorie ortsabhängige quadratische chromoelektrische und chromomagnetische Feldstärken für Zustände, die hybriden $\bar{b}b$-Potentialen entsprechen.

$$\Delta F^2_{\mu\nu,\Lambda^\epsilon_\eta}(r;\mathbf{x}) \quad = \quad \langle 0_{\Lambda^\epsilon_\eta}(r)|F^2_{\mu\nu}(\mathbf{x})|0_{\Lambda^\epsilon_\eta}(r)\rangle - \langle\Omega|F^2_{\mu\nu}|\Omega\rangle.$$

  - $F^2_{\mu\nu}(\mathbf{x})$, $F^2_{\mu\nu}$: quadratische chromoelektrische und chromomagnetische Feldstärken.
  - $|0_{\Lambda^\epsilon_\eta}(r)\rangle$: "hybrider $\bar{b}b$-Potential-Zustand" (r bezeichnet $\bar{b}b$-Abstand).
  - $|\Omega\rangle$: Vacuum.

$\rightarrow$ **Sichtbarmachen der hybriden Flussschläuche zwischen dem Quark b und dem Antiquark $\bar{b}$.**

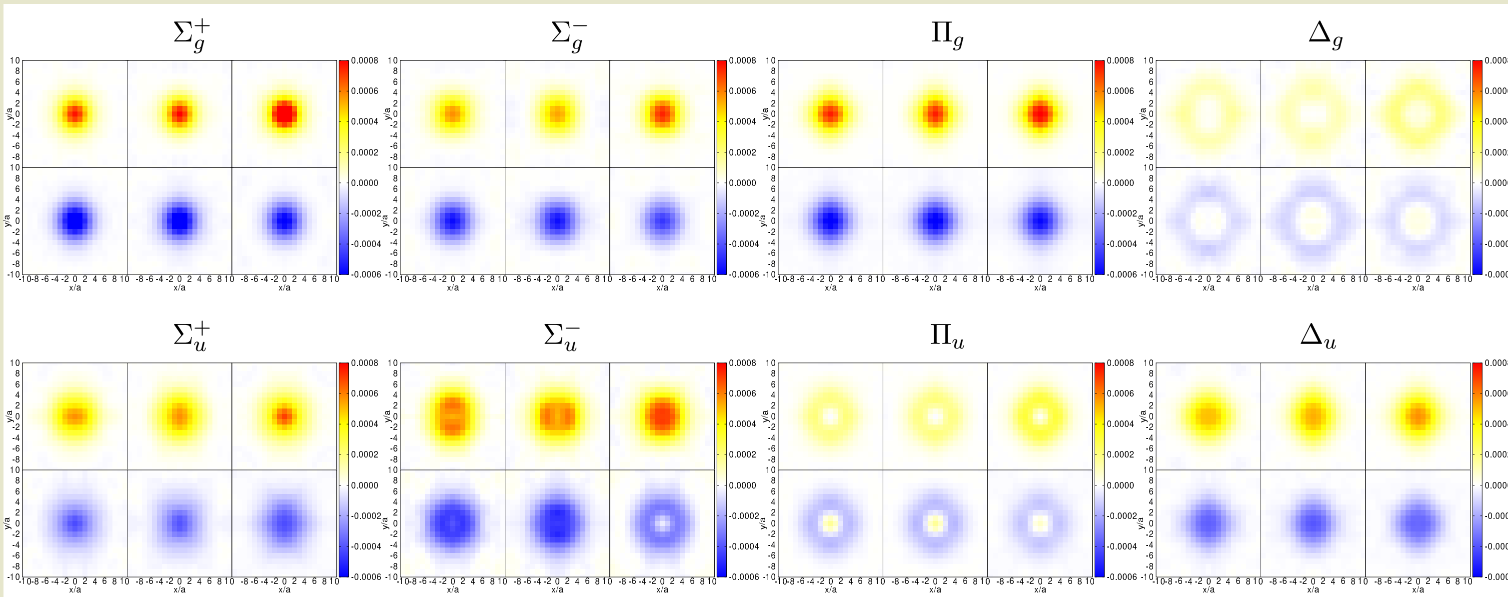
- Die Summe über die sechs $\Delta F^2_{\mu\nu,\Lambda^\epsilon_\eta}(r;\mathbf{x})$ entspricht der Energiedichte des Gluonfelds.

Hybride Flussschläuche (2)

- $\Delta F^2_{\mu\nu,\Lambda_\eta^\epsilon}(r;\mathbf{x})$, SU(2), "Mediator-Plane" (x-y-Ebene mit b, $\bar{b}$ bei $(0,0,\pm r/2)$), $r \approx 0.8\,$fm.
[L. Müller, O. Philipsen, C. Reisinger, M.W., Phys. Rev. D **100**, 054503 (2019) [arXiv:1907.014820]]]

- Ergebnisse zu $\Lambda_\eta^\epsilon = \Sigma_g^+, \Sigma_u^+, \Pi_u$ auch in
[P. Bicudo, N. Cardoso and M. Cardoso, Phys. Rev. D **98**, 114507 (2018) [arXiv:1808.08815]]

ΔE_x^2	ΔE_y^2	ΔE_z^2
ΔB_x^2	ΔB_y^2	ΔB_z^2

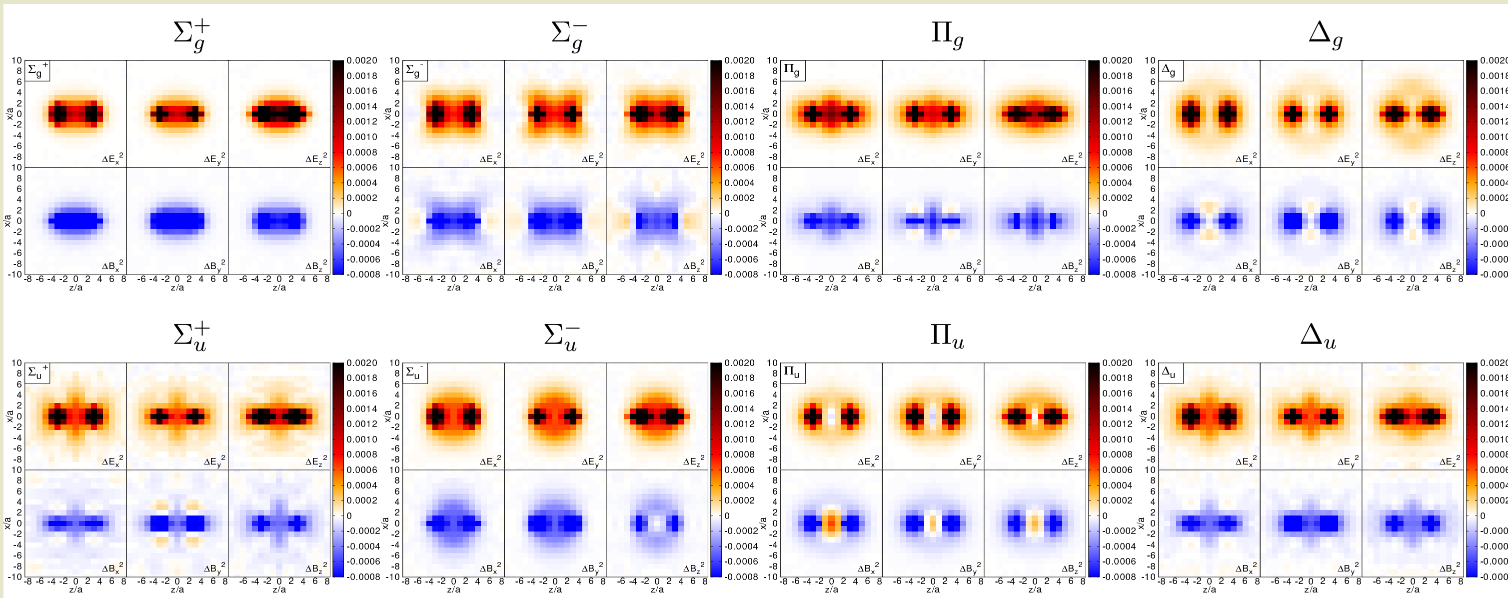


Hybride Flussschläuche, $r \approx 0.48\,\text{fm}$ (3)

- $\Delta F^2_{\mu\nu,\Lambda_\eta^\epsilon}(r;\mathbf{x})$, SU(2), Separations-Ebene (x-z-Ebene mit b, $\bar{b}$ bei $(0,0,\pm r/2)$), $r \approx 0.48\,\text{fm}$.
  [L. Müller, O. Philipsen, C. Reisinger, M.W., Phys. Rev. D **100**, 054503 (2019) [arXiv:1907.014820]]]

- Ergebnisse zu $\Lambda_\eta^\epsilon = \Sigma_g^+, \Sigma_u^+, \Pi_u$ auch in
  [P. Bicudo, N. Cardoso and M. Cardoso, Phys. Rev. D **98**, 114507 (2018) [arXiv:1808.08815]]

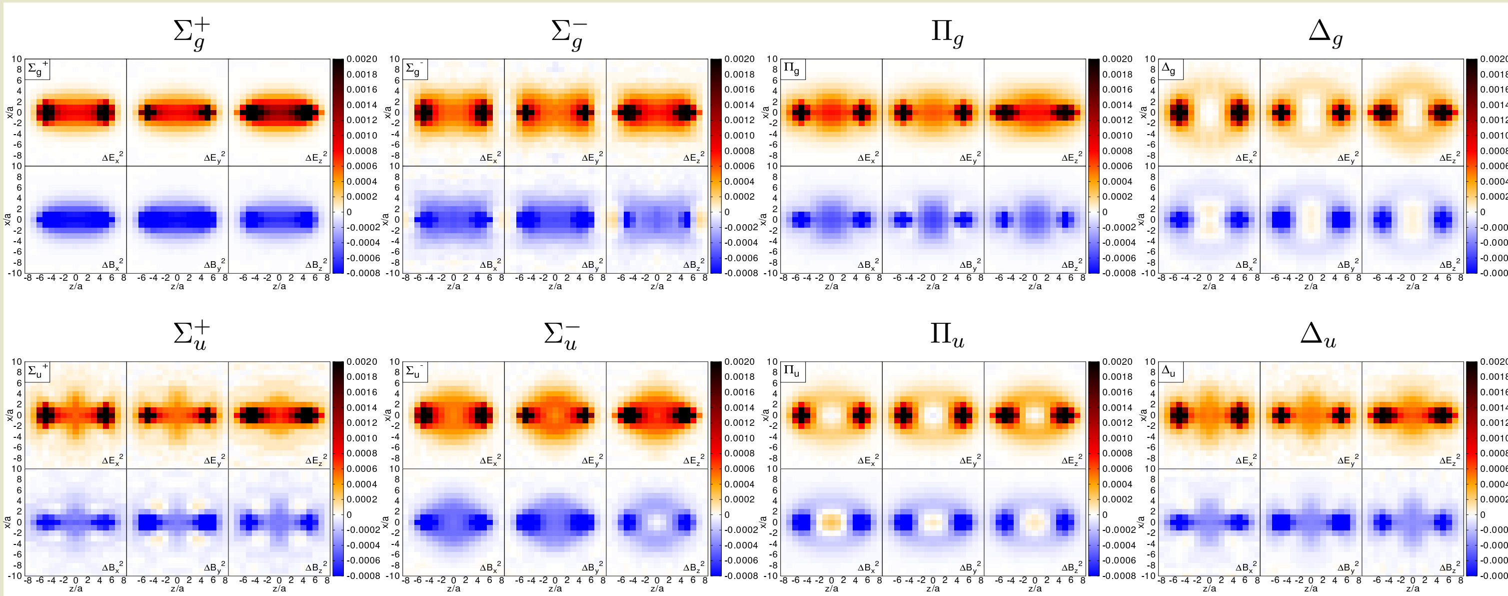
ΔE_x^2	ΔE_y^2	ΔE_z^2
ΔB_x^2	ΔB_y^2	ΔB_z^2



Hybride Flussschläuche, $r \approx 0.80$ fm (3)

- $\Delta F^2_{\mu\nu,\Lambda_\eta^\epsilon}(r; \mathbf{x})$, SU(2), Separations-Ebene (x-z-Ebene mit b, $\bar{b}$ bei $(0, 0, \pm r/2)$), $r \approx 0.80$ fm.
[L. Müller, O. Philipsen, C. Reisinger, M.W., Phys. Rev. D **100**, 054503 (2019) [arXiv:1907.014820]]]
- Ergebnisse zu $\Lambda_\eta^\epsilon = \Sigma_g^+, \Sigma_u^+, \Pi_u$ auch in
[P. Bicudo, N. Cardoso and M. Cardoso, Phys. Rev. D **98**, 114507 (2018) [arXiv:1808.08815]]

ΔE_x^2	ΔE_y^2	ΔE_z^2
ΔB_x^2	ΔB_y^2	ΔB_z^2



Zusammenfassung

- **Ziel: Ausgehend von QCD Masse und Struktur schwerer exotischer Mesonen verstehen.**
- Berechnung von Massen schwerer exotischer Mesonen im Rahmen der Born-Oppenheimer-Approximation.
  (1) Gitter-QCD-Berechnung von $\bar{b}b$-Potentialen.
  (Behandlung leichter Freiheitsgrade in QCD)
  (2) Lösen der Schrödinger-Gleichung mit den Potentialen aus (1).
  (Behandlung schwerer Freiheitsgrade in Quantenmechanik)
- Ausgewählte Ergebnisse diskutiert:
  – Gitter-QCD-Berechnung von $\bar{b}\bar{b}qq$-/BB-Potentialen und hybriden $\bar{b}b$-Potentialen.
  – Vorhersage eines stabilen $\bar{b}\bar{b}ud$-Tetraquarks mit Quantenzahlen $I(J^P) = 0(1^+)$.
  – Untersuchung der Struktur dieses Tetraquarks: $\%BB \approx 60\%$, $\%Dd \approx 40\%$.
  – Berechnung von gluonischen Energiedichten für hybride $\bar{b}b$-Mesonen (Sichtbarmachen von Flussschläuchen).