Einführung in die Supersymmetrie

Marc Wagner
mcwagner@theorie3.physik.uni-erlangen.de
Institut für Theoretische Physik III
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

6. Februar 2004

Zusammenfassung

Diese Arbeit bietet eine Einführung in die grundlegenden Konzepte supersymmetrischer Theorien. Zuerst werden Eigenschaften und Transformationsverhalten von Zweierspinoren diskutiert, notwendige Voraussetzungen zum weiteren Verständnis dieser Ausarbeitung. Es folgen die Theoreme von Coleman und Mandula beziehungsweise Haag, Lopuszanski und Sohnius zusammen mit der dadurch festgelegten Supersymmetrie-Algebra. Die anschließende Diskussion irreduzibler Einteilchen-Darstellungen liefert Informationen über die Spektren supersymmetrischer Theorien. Abschließend wird die einfachste supersymmetrische Feldtheorie, das masselose Wess-Zumino-Modell, vorgestellt.

1 Einleitung

1.1 Was ist Supersymmetrie?

Supersymmetrie ist eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen. Eine supersymmetrische Transformation transformiert bosonische Felder in fermionische und umgekehrt. Dabei bleibt die Wirkung unverändert. In supersymmetrischen Theorien treten Bosonen und Fermionen stets paarweise auf. Supersymmetrische Multipletts enthalten jeweils die gleiche Anzahl von Bosonen und Fermionen. Alle Teilchen eines Multipletts besitzen dieselbe Masse.

Bis jetzt konnten noch keine direkten Hinweise gefunden werden, dass Bereiche der durch gegenwärtige Experimente zugänglichen Physik durch supersymmetrische Theorien beschrieben werden. Beispielsweise existiert kein supersymmetrischer Partner des Elektrons, das heißt ein Teilchen, welches die Masse des Elektrons besitzt, jedoch der Bose-Statistik unterliegt. Eine mögliche und weitläufig akzeptierte Erklärung dieser Tatsache ist spontane Symmetriebrechung jenseits einer Energieschwelle wie sie in heutigen Experimenten zugänglich ist ([5], Kapitel 6 und 11, [6], Kapitel 7).

1.2 Warum Supersymmetrie?

Die Superstring-Theorie ist der momentan aussichtsreichste Kandidat für eine "Theory of Everything". Supersymmetrische Stringtheorien besitzen ein niederenergetisches-Spektrum, das ebenso viele Bosonen wie Fermionen enthält. Die zugehörigen niederenergetischen Feldtheorien sind supersymmetrisch.

Davon abgesehen stellt die Supersymmetrie die einzig mögliche Erweiterung der durch die Poincaré-Gruppe erzeugten Raumzeit-Symmetrien dar (alle anderen Symmetrien, zum Beispiel Colour- oder Flavour-Symmetrien, sind unabhängig von den durch die Poincaré-Gruppe erzeugten Raumzeit-Symmetrien). Supersymmetrie ist daher nicht eine willkürlich aus vielen Möglichkeiten gewählte Symmetrie, sondern eine durch wenige physikalische Annahmen eindeutig ausgezeichnete (Coleman-Mandula-Theorem und Theorem von Haag, Lopuszanski und Sohnius; Kapitel 3).

Eine schöne Eigenschaft supersymmetrischer Quantenfeldtheorien besteht darin, dass sie stets schwächere Divergenzen als vergleichbare nicht-supersymmetrische Quantenfeldtheorien besitzen. Dies liegt daran, dass sich einige der in den Störungsreihen auftretenden Feynman-Diagramme gegenseitig wegheben (ersetzt man in einem internen Loop ein Boson durch seinen fermionischen Partner oder umgekehrt, tritt ein relatives Minuszeichen auf). Es gibt sogar supersymmetrische Theorien, die keinerlei Divergenzen aufweisen, das heißt auf Renormierung kann bei derartigen Theorien vollständig verzichtet werden.

Abschließend kann die mathematische Eleganz supersymmetrischer Feldtheorien genannt werden: *"Despite its exasperating complexity it has an undoubted mathematical fascination and some physicists incline to the view that God must surely have made use of such an interesting theory."* ([4], Seite 426).

2 Zweierspinoren: Transformationsverhalten und Rechenregeln

Fermionische Felder und fermionische Operatoren werden in supersymmetrischen Feldtheorien fast immer durch Zweierspinoren (manchmal auch Weyl-Spinoren genannt) ausgedrückt. In diesem Kapitel werden die Transformationsverhalten von Zweierspinoren sowie daraus folgende Rechenregeln und Identitäten diskutiert.

2.1 Ungepunktete und gepunktete Spinoren

Die Lorentz-Algebra hat die Form

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{1}$$
$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \tag{2}$$
$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \tag{3}$$

(J_i sind die Erzeugenden von Rotationen, K_i sind die Erzeugenden von Boosts). Es gibt zwei nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen der Lorentz-Algebra durch 2×2-Matrizen,

$$J_i = \frac{\sigma^i}{2} \quad , \quad K_i = i\frac{\sigma^i}{2} \tag{4}$$

und

$$J_i = \frac{\sigma^i}{2} \quad , \quad K_i = -i\frac{\sigma^i}{2} \quad . \tag{5}$$

Folglich gibt es auch zwei verschiedene Arten von Zweier-Spinoren (Spinoren mit unterschiedlichem Transformationsverhalten), die als ungepunktete beziehungsweise gepunktete Spinoren bezeichnet werden. Für das Transformationsverhalten von ungepunkteten Spinoren gilt

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi \rightarrow \psi' = \underbrace{e^{i\sigma^i/2(\alpha_i + i\xi_i)}}_{=s}\psi = s\psi \quad . \tag{6}$$

Gepunktete Spinoren werden per Konvention überstrichen und erhalten Indizes die mit einem Punkt versehen sind. Für ihr Transformationsverhalten gilt

$$\overline{\psi} = \begin{pmatrix} \overline{\psi}^{\dot{1}} \\ \overline{\psi}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{\psi} \rightarrow \overline{\psi}' = \underbrace{e^{i\sigma^i/2(\alpha_i - i\xi_i)}}_{=(s^{-1})^\dagger}\overline{\psi} = (s^{-1})^\dagger\overline{\psi} \quad . \tag{7}$$

Werden Antivertauschungsrelationen nicht explizit angegeben, wie zum Beispiel bei den fermionischen Erzeugenden der Supersymmetrie-Algebra (Kapitel 3), besitzen ungepunktete und gepunktete Spinorkomponenten die Grassmann-Eigenschaft. Das heißt für Spinoren ψ, η, $\overline{\psi}$ und $\overline{\eta}$ gilt

$$\{\psi_\alpha, \eta_\beta\} = \{\psi_\alpha, \overline{\eta}^{\dot{\beta}}\} = \{\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}, \overline{\eta}^{\dot{\beta}}\} = 0 \quad . \tag{8}$$

2.2 Lorentz-Skalare aus ungepunkteten Spinoren

Es gilt

$$\sigma^2(\sigma^i)^T\sigma^2 = -\sigma^i \quad , \quad (\sigma^i)^T = -\sigma^2\sigma^i\sigma^2 \quad . \tag{9}$$

Definiert man ungepunktete Spinoren mit oberen Indizes gemäß

$$\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = i\sigma^2\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} \quad , \tag{10}$$

so folgt für deren Transformationsverhalten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} &= i\sigma^2\psi \rightarrow \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}' = i\sigma^2\psi' = i\sigma^2 s\psi = i\sigma^2 e^{i\sigma^i/2(\alpha_i+i\xi_i)}\sigma^2\sigma^2\psi = \\ &= e^{i\sigma^2\sigma^i\sigma^2/2(\alpha_i+i\xi_i)}i\sigma^2\psi = e^{-i(\sigma^i)^T/2(\alpha_i+i\xi_i)}i\sigma^2\psi = (s^{-1})^T\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

((9) wurde verwendet). Ungepunktete Spinoren mit unteren und ungepunktete Spinoren mit oberen Indizes können zu Lorentz-Skalaren kombiniert werden:

$$\begin{aligned} \eta^\alpha\psi_\alpha &= (\eta^1, \eta^2)\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \eta'^\alpha\psi'_\alpha = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}'^T\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}' = \\ &= \left((s^{-1})^T\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}\right)^T s\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = (\eta^1, \eta^2)s^{-1}s\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = (\eta^1, \eta^2)\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \\ &= \eta^\alpha\psi_\alpha \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

Aus (10) ist ersichtlich, dass der total antisymmetrische Tensor $\epsilon^{\alpha\beta}$ ($\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$, $\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}$, $\epsilon^{12} = 1$), zum Hoch- und Runterziehen von Indizes verwendet werden kann und somit die Funktion eines metrischen Tensors besitzt:

$$\psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta} \tag{13}$$

$$\psi_{\alpha} = \delta_{\alpha}{}^{\gamma}\psi_{\gamma} = -\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma}\psi_{\gamma} = -\epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} = -\psi^{\beta}\epsilon_{\alpha\beta} = \psi^{\beta}\epsilon_{\beta\alpha} \quad . \tag{14}$$

Es ist zu beachten, dass die hier vorliegende Metrik antisymmetrisch ist. Dies impliziert

$$\eta^{\alpha}\psi_{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\eta_{\beta}\psi^{\gamma}\epsilon_{\gamma\alpha} = \epsilon_{\gamma\alpha}\epsilon^{\alpha\beta}\eta_{\beta}\psi^{\gamma} = -\delta_{\gamma}{}^{\beta}\eta_{\beta}\psi^{\gamma} = -\eta_{\beta}\psi^{\beta} \quad . \tag{15}$$

Die Definition

$$\eta\psi = \eta^{\alpha}\psi_{\alpha} \tag{16}$$

erlaubt eine indexfreie Schreibweise. Es gilt

$$\eta\psi = \eta^{\alpha}\psi_{\alpha} = -\psi_{\alpha}\eta^{\alpha} = -\psi^{\beta}\epsilon_{\beta\alpha}\epsilon^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma} = -\psi^{\beta}(-\delta_{\beta}{}^{\gamma})\eta_{\gamma} = \psi^{\beta}\eta_{\beta} = \psi\eta \quad . \tag{17}$$

2.3 Lorentz-Skalare aus gepunkteten Spinoren

Die Definitionen und Rechnungen aus Abschnitt 2.2 lassen sich analog für gepunktete Spinoren durchführen.

Definition (analog zu (10)):

$$\begin{pmatrix} \overline{\psi}_{\dot{1}} \\ \overline{\psi}_{\dot{2}} \end{pmatrix} = -i\sigma^2\overline{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\psi}^{\dot{1}} \\ \overline{\psi}^{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\psi}^{\dot{2}} \\ \overline{\psi}^{\dot{1}} \end{pmatrix} \quad . \tag{18}$$

Transformationsverhalten (analog zu (11)):

$$\begin{pmatrix} \overline{\psi}_{\dot{1}} \\ \overline{\psi}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\psi}_{\dot{1}} \\ \overline{\psi}_{\dot{2}} \end{pmatrix}' = s^* \begin{pmatrix} \overline{\psi}_{\dot{1}} \\ \overline{\psi}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad . \tag{19}$$

Lorentz-Skalar (analog zu (12)):

$$\overline{\eta}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \to \overline{\eta}'_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}'^{\dot{\alpha}} = \overline{\eta}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad . \tag{20}$$

Metrischer Tensor: $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$, $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, $\epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -1$.

Hoch- und Runterziehen von Indizes (analog zu (13) und (14)):

$$\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\psi}^{\dot{\beta}} \quad , \quad \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\psi}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \quad . \tag{21}$$

Indexfreie Schreibweise (analog zu (16)):

$$\overline{\eta}\overline{\psi} \quad = \quad \overline{\eta}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad . \tag{22}$$

Analog zu (17):

$$\overline{\eta}\overline{\psi} \quad = \quad \overline{\psi}\overline{\eta} \quad . \tag{23}$$

2.4 Zusammenhang zwischen ungepunkteten und gepunkteten Spinoren

Um zu zeigen, dass sich ein komplex konjugierter gepunkteter Spinor wie ein ungepunkteter Spinor transformiert, wird (19) komplex konjugiert:

$$\begin{pmatrix} \overline{\psi}_{\dot{1}} \\ \overline{\psi}_{\dot{2}} \end{pmatrix}^* \quad \to \quad s \begin{pmatrix} \overline{\psi}_{\dot{1}} \\ \overline{\psi}_{\dot{2}} \end{pmatrix}^* \quad . \tag{24}$$

Die Komponenten ψ_α und $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$ besitzen demnach das gleiche Transformationsverhalten (Vergleich von (6) mit (24)). Ungepunktete und komplex konjugierte gepunktete Spinoren mit jeweils unteren Indizes können folglich gleichgesetzt werden:

$$\psi_\alpha \quad = \quad (\overline{\psi}_{\dot{\alpha}})^* \quad . \tag{25}$$

Analoges Vorgehen für Spinoren mit oberen Indizes liefert

$$\psi^\alpha \quad = \quad (\overline{\psi}^{\dot{\alpha}})^* \quad . \tag{26}$$

2.5 Vierervektoren aus ungepunkteten und gepunkteten Spinoren

In diesem Abschnitt und auch in allen folgenden wird als Minkowski-Metrik
$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+,-,-,-)$ verwendet.

Die Matrizen

$$\sigma^\mu \quad = \quad (1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \quad , \quad \overline{\sigma}^\mu \quad = \quad (1, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \tag{27}$$

erfüllen die Identitäten

$$\sigma^\mu \quad = \quad \Lambda^\mu{}_\nu s \sigma^\nu s^\dagger \tag{28}$$

$$\overline{\sigma}^\mu \quad = \quad \Lambda^\mu{}_\nu (s^{-1})^\dagger \overline{\sigma}^\nu s^{-1} \quad . \tag{29}$$

Aus (6), (7), (11) und (19) ist die Art der Indizes (ungepunktet oder gepunktet, unten oder oben) der Spinortransformationsmatrizen ersichtlich:

$$s_\alpha{}^\beta \quad , \quad ((s^{-1})^\dagger)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \quad , \quad ((s^{-1})^T)^\alpha{}_\beta \quad , \quad (s^*)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \quad . \tag{30}$$

Es folgt

$$((s^*)_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta})^T = ((s^*)^T)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} = (s^\dagger)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \tag{31}$$

$$(((s^{-1})^T)^\alpha{}_\beta)^T = (((s^{-1})^T)^T)_\beta{}^\alpha = (s^{-1})_\beta{}^\alpha \quad . \tag{32}$$

Durch (30) bis (32) wird die Art der Spinorindizes von σ^μ und $\overline{\sigma}^\mu$ festgelegt ((28) und (29) in Komponentenform):

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} = \Lambda^\mu{}_\nu s_\alpha{}^\gamma (\sigma^\nu)_{\gamma\dot\delta} (s^\dagger)^{\dot\delta}{}_{\dot\beta} \tag{33}$$

$$(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\nu ((s^{-1})^\dagger)^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma} (\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\gamma\delta} (s^{-1})_\delta{}^\beta \quad . \tag{34}$$

Das bedeutet, $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}$ und $(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}$ sind numerisch invariante Tensoren, die einen Viererindex und zwei Spinorindizes tragen. Mit ihrer Hilfe können zwei Spinoren ψ und η so kombiniert werden, dass sich die Kombinationen wie Vierervektoren transformieren:

$$\psi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \overline{\eta}^{\dot\beta} \rightarrow \psi'^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \overline{\eta}'^{\dot\beta} = \Lambda^\mu{}_\nu \psi^\alpha (\sigma^\nu)_{\alpha\dot\beta} \overline{\eta}^{\dot\beta} \tag{35}$$

$$\overline{\psi}_{\dot\beta} (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha} \eta_\alpha \rightarrow \overline{\psi}'_{\dot\beta} (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha} \eta'_\alpha = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{\psi}_{\dot\beta} (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha} \eta_\alpha \quad . \tag{36}$$

In Analogie zu (16) und (22) wird auch hier häufig eine indexfreie Schreibweise verwendet:

$$\psi\sigma^\mu\overline{\eta} = \psi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \overline{\eta}^{\dot\beta} \tag{37}$$

$$\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\eta = \overline{\psi}_{\dot\beta} (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha} \eta_\alpha \quad . \tag{38}$$

2.6 Häufig verwendete Spinoridentitäten

Im Folgenden wird eine Reihe häufig verwendeter Spinor-Identitäten angegeben beziehungsweise hergeleitet. Die Liste ist keineswegs vollständig. Weitere nützliche Identitäten und Rechenregeln finden sich zum Beispiel in [1], Abschnitt 1.2, [4], Abschnitt 11.3 und 11.4, und [5], Anhang A.

Die σ- und $\overline{\sigma}$-Matrizen erfüllen

$$\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{39}$$

$$\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \quad . \tag{40}$$

Zwischen $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}$ und $(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}$ bestehen die Beziehungen

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} = \epsilon_{\dot\beta\dot\delta} (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\delta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha} \tag{41}$$

$$(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} = \epsilon^{\beta\delta} (\sigma^\mu)_{\delta\dot\gamma} \epsilon^{\dot\gamma\dot\alpha} \quad . \tag{42}$$

Eine σ-Matrix an einem Spinor vorbeizuziehen kehrt das Vorzeichen um und verändert die Matrix zu einer $\overline{\sigma}$-Matrix und umgekehrt:

$$\Big(\eta\sigma^\mu\overline{\psi} = \eta^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \overline{\psi}^{\dot\beta}\Big) = \Big(-\overline{\sigma}^\mu\eta\overline{\psi} = -\epsilon_{\dot\beta\dot\gamma} (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\gamma\alpha} \eta_\alpha \overline{\psi}^{\dot\beta}\Big) =$$

$$= \Big(-\eta\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \quad = \quad -\eta^\alpha\overline{\psi}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\gamma}\epsilon_{\gamma\alpha}\Big) \tag{43}$$

$$\Big(\overline{\eta}\overline{\sigma}^\mu\psi \quad = \quad \overline{\eta}_{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\psi_\beta\Big) \quad = \quad \Big(-\sigma^\mu\overline{\eta}\psi \quad = \quad -\epsilon^{\beta\gamma}(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\alpha}\overline{\eta}^{\dot\alpha}\psi_\beta\Big) \quad =$$
$$= \Big(-\overline{\eta}\psi\sigma^\mu \quad = \quad -\overline{\eta}_{\dot\alpha}\psi^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\gamma}\epsilon^{\dot\gamma\dot\alpha}\Big) \quad . \tag{44}$$

Daraus folgt unter Verwendung von (17)

$$\eta\sigma^\mu\overline{\psi} \quad = \quad -\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\eta \quad . \tag{45}$$

Komplexe Konjugation eines Produkts zweier Spinoren enthält per Definition die Vertauschung der beiden Spinoren, das heißt

$$(\eta\psi)^* \quad = \quad (\eta^\alpha\psi_\alpha)^* \quad = \quad (\psi_\alpha)^*(\eta^\alpha)^* \tag{46}$$
$$(\overline{\eta}\overline{\psi})^* \quad = \quad (\overline{\eta}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha})^* \quad = \quad (\overline{\psi}^{\dot\alpha})^*(\overline{\eta}_{\dot\alpha})^* \quad . \tag{47}$$

Damit folgt

$$(\eta\psi)^* \quad = \quad \overline{\eta}\overline{\psi} \quad . \tag{48}$$

Komplexe Konjugation eines Spinors und einer σ-Matrix vertauscht deren Reihenfolge und verändert das Transformationsverhalten des Spinors von ungepunktet zu gepunktet und umgekehrt:

$$\Big((\sigma^\mu\overline{\psi})^* \quad = \quad \Big((\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}\Big)^*\Big) \quad = \quad \Big(\psi\sigma^\mu \quad = \quad \psi^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\Big) \tag{49}$$
$$\Big((\overline{\sigma}^\mu\psi)^* \quad = \quad \Big((\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta}\psi_\beta\Big)^*\Big) \quad = \quad \Big(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \quad = \quad \overline{\psi}_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\alpha}\Big) \quad . \tag{50}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen erhält man

$$(\eta\sigma^\mu\overline{\psi})^* \quad = \quad \Big(\eta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}\Big)^* \quad = \quad \Big((\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}\Big)^*(\eta^\alpha)^* \quad = \quad \psi^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\overline{\eta}^{\dot\alpha} \quad = \quad \psi\sigma^\mu\overline{\eta} \quad =$$
$$= \quad -\overline{\eta}\overline{\sigma}^\mu\psi \quad . \tag{51}$$

Die Fierz-Identität lautet

$$\xi_\alpha(\eta\chi) + \eta_\alpha(\chi\xi) + \chi_\alpha(\xi\eta) \quad = \quad 0 \quad . \tag{52}$$

3 Supersymmetrie-Algebra

3.1 Coleman-Mandula-Theorem

Das Coleman-Mandula-Theorem macht eine Aussage bezüglich möglicher Symmetriegruppen in relativistischen Quantenfeldtheorien [2]. Es handelt sich um ein mächtiges "No-Go-Theorem", das denkbare Symmetrien der S-Matrix stark einschränkt.

Das Coleman-Mandula-Theorem geht von folgenden Annahmen aus:

- Betrachtet wird eine lokale relativistische Quantenfeldtheorie in vierdimensionaler Raumzeit.
- Die Anzahl unterschiedlicher Teilchen einer gegebenen Masse ist endlich.
- Es existiert ein eindeutiger Vakuumzustand und eine endliche Energiedifferenz zwischen diesem Vakuum und dem energetisch niedrigsten Einteilchen-Zustand.

Das Coleman-Mandula-Theorem besagt, dass die allgemeinste Symmetriegruppe der S-Matrix ein direktes Produkt der Poincaré-Gruppe (Raumzeit-Symmetrien) und einer kompakten Lie-Gruppe (innere Symmetrien, zum Beispiel Colour-Symmetry oder Flavour-Symmetry) ist. Sie besitzt die folgenden Erzeugenden:

- P^μ (Energie-Impuls-Operator, Erzeugende von Translationen).
- $M^{\mu\nu}$ (Erzeugende von Boosts und Rotationen).
- B_r (eine endliche Anzahl von skalaren Operatoren, die einer kompakten Lie-Gruppe angehören).

Die Poincaré-Algebra und die Algebra der internen Symmetriegruppe haben die Form

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \tag{53}$$
$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = i(\eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu) \tag{54}$$
$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \tag{55}$$

$$[B_r, B_s] = i c_{rst} B_t \tag{56}$$

$$[B_r, P^\mu] = 0 \quad , \quad [B_r, M_{\mu\nu}] = 0 \quad . \tag{57}$$

Die Unabhängigkeit der Raumzeitsymmetrien und der inneren Symmetrien spiegelt sich in den Kommutatorrelationen (57) wieder.

3.2 Supersymmetrie-Algebra und Theorem von Haag, Lopuszanski und Sohnius

Supersymmetrie entsteht, indem man die Beschränkung auf Lie-Algebren zu Gunsten gradierter Lie-Algebren fallen lässt. Gradierte Lie-Algebren enthalten neben Kommutatorrelationen auch Antikommutatorrelationen. Das Theorem von Haag, Lopuszanski und Sohnius besagt, dass die Supersymmetrie-Algebra und die erweiterten Supersymmetrie-Algebren die einzigen gradierten Lie-Algebren sind, die nicht zu Inkonsistenzen bei relativistischen Quantenfeldtheorien führen [3].

Die Supersymmetrie-Algebra hat die Form

$$\{Q^i_\alpha, \overline{Q}^j_{\dot\beta}\} = 2\delta^{ij} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \tag{58}$$

$$\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = 2\epsilon_{\alpha\beta} Z^{ij} \quad , \quad \{\overline{Q}^i_{\dot\alpha}, \overline{Q}^j_{\dot\beta}\} = 2\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(Z^{ij})^* \tag{59}$$

$$[Q^i_\alpha, P^\mu] = 0 \quad , \quad [\overline{Q}^i_{\dot\alpha}, P^\mu] = 0 \tag{60}$$

$$[Q^i_\alpha, M^{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q^i_\beta \quad , \quad [\overline{Q}^i_{\dot\alpha}, M^{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}\overline{Q}^i_{\dot\beta}(\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \tag{61}$$

$$[Q^i_\alpha, B_r] = b^{ij}_r Q^j_\alpha \quad , \quad [\overline{Q}^i_{\dot\alpha}, B_r] = -(b^{ij}_r)^* \overline{Q}^j_{\dot\alpha} \tag{62}$$

$$[Z^{ij}, \text{beliebige Erzeugende}] = 0 \tag{63}$$

wobei

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta = \frac{i}{2}\left((\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\gamma\beta} - (\sigma^\nu)_{\alpha\dot\gamma}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\gamma\beta}\right) \tag{64}$$

$$(\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} = \frac{i}{2}\left((\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\beta\gamma}(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\alpha} - (\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\gamma}(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\alpha}\right) \tag{65}$$

gilt. Die Indizes i und j, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N$, nummerieren die Erzeugenden der Supersymmetrie. Bei $N \geq 2$ spricht man von erweiterter Supersymmetrie. Die Operatoren Z^{ij} werden als zentrale Ladungen bezeichnet, weil sie mit allen Erzeugenden der Supersymmetrie-Algebra vertauschen. Sie sind Linearkombinationen der skalaren Operatoren B_r, das heißt

$$Z^{ij} = a^{ij}_r B_r \quad . \tag{66}$$

Aus (59) folgt $Z^{ij} = -Z^{ji}$. Zentrale Ladungen treten auf Grund dieser Antisymmetrie nur bei $N \geq 2$ auf.

4 Irreduzible Einteilchen-Darstellungen der Supersymmetrie-Algebra

Die Analyse der irreduziblen Einteilchen-Darstellungen der Supersymmetrie-Algebra bietet aufschlussreiche Informationen über die Eigenschaften der in supersymmetrischen Theorien vorkommenden Teilchen und Felder.

4.1 Allgemeine Eigenschaften supersymmetrischer Multipletts

P^2 ist ein Casimir-Operator der Supersymmetrie-Algebra, das heißt er vertauscht mit allen Erzeugenden. Alle Teilchen eines Multipletts haben daher die gleiche Masse. Ist $|\phi\rangle$ ein Einteilchen-Zustand mit Masse m und A eine beliebige Erzeugende der Supersymmetrie-Algebra, dann ist auch $\exp(i\xi A)|\phi\rangle$ ein Einteilchen-Zustand mit Masse m:

$$P^2\left\{e^{i\xi A}|\phi\rangle\right\} = e^{i\xi A}P^2|\phi\rangle = e^{i\xi A}m^2|\phi\rangle = m^2\left\{e^{i\xi A}|\phi\rangle\right\} \quad . \tag{67}$$

W^2 ($W^\mu = \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}P_\nu M_{\sigma\tau}$), das Quadrat des Pauli-Lubanski-Vektors, ist (im Gegensatz zur Poincaré-Algebra) kein Casimir-Operator, da W^2 nicht mit den Operatoren Q^i_α und $\overline{Q}^i_{\dot\alpha}$ vertauscht. Ein Multiplett enthält daher Teilchen mit unterschiedlichen Gesamtspins.

Jedes Multiplett beinhaltet die gleiche Anzahl an bosonischen und fermionischen Zuständen. Um dies zu zeigen, führt man den Fermionenzahl-Operator N_F ein. Bosonische Zustände sind Eigenzustände von $(-1)^{N_F}$ mit Eigenwert $+1$, fermionische Zustände sind Eigenzustände von $(-1)^{N_F}$ mit Eigenwert -1. Da der Operator Q^i_α bosonische Zustände in fermionische Zustände transformiert und umgekehrt folgt

$$(-1)^{N_F} Q^i_\alpha \;=\; -Q^i_\alpha (-1)^{N_F} \quad . \tag{68}$$

Es gilt sowohl

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\Big[(-1)^{N_F}\{Q^i_\alpha, \overline{Q}^j_{\dot\beta}\}\Big] &= \mathrm{Tr}\Big[(-1)^{N_F}\Big(Q^i_\alpha \overline{Q}^j_{\dot\beta} + \overline{Q}^j_{\dot\beta} Q^i_\alpha\Big)\Big] = \\ = \mathrm{Tr}\Big[-Q^i_\alpha(-1)^{N_F}\overline{Q}^j_{\dot\beta} + Q^i_\alpha(-1)^{N_F}\overline{Q}^j_{\dot\beta}\Big] &= 0\end{aligned} \tag{69}$$

((68) und die Zyklizität der Spur wurden verwendet) als auch

$$\mathrm{Tr}\Big[(-1)^{N_F}\{Q^i_\alpha, \overline{Q}^j_{\dot\beta}\}\Big] \;=\; \mathrm{Tr}\Big[(-1)^{N_F} 2\delta^{ij}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu\Big] \;=\; 2\delta^{ij}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\mathrm{Tr}\Big[(-1)^{N_F} P_\mu\Big] \quad . \tag{70}$$

((58) wurde verwendet). Vergleich von (69) und (70) führt auf

$$2\delta^{ij}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\mathrm{Tr}\Big[(-1)^{N_F} P_\mu\Big] \;=\; 0 \quad , \tag{71}$$

was sich bei festem $P_\mu \neq 0$ zu

$$\mathrm{Tr}\Big[(-1)^{N_F}\Big] \;=\; 0 \tag{72}$$

vereinfacht. Die Behauptung ist damit bewiesen.

4.2 Masselose Teilchen

Es werden masselose Teilchen ($P^2 = m^2 = 0$) in dem Inertialsystem betrachtet, in dem $P_\mu = (E, 0, 0, E)$ gilt. (58) vereinfacht sich zu

$$\{Q^i_\alpha, \overline{Q}^j_{\dot\beta}\} \;=\; \delta^{ij}\begin{pmatrix} 4E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\dot\beta} \quad . \tag{73}$$

Aus

$$0 \;=\; \langle\phi|\{Q^i_2, \overline{Q}^i_{\dot2}\}|\phi\rangle \;=\; \langle\phi|Q^i_2\overline{Q}^i_{\dot2} + \overline{Q}^i_{\dot2}Q^i_2|\phi\rangle \;=\; \Big|\overline{Q}^i_{\dot2}|\phi\rangle\Big|^2 + \Big|Q^i_2|\phi\rangle\Big|^2 \tag{74}$$

folgt

$$Q^i_2 \;=\; 0 \quad , \quad \overline{Q}^i_{\dot2} \;=\; 0 \quad . \tag{75}$$

Einsetzen der Reskalierung

$$a^i = \frac{1}{2\sqrt{E}}Q_1^i \quad , \quad (a^i)^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{E}}\overline{Q}_1^i \tag{76}$$

in (59) und (73) führt auf die Algebra

$$\{a^i, (a^j)^\dagger\} = \delta^{ij} \quad , \quad \{a^i, a^j\} = 0 \quad , \quad \{(a^i)^\dagger, (a^j)^\dagger\} = 0 \quad . \tag{77}$$

Dies entspricht der Algebra von N fermionischen Erzeugern und N fermionischen Vernichtern. Es gibt demnach die 2^N Zustände

$$(a^{i_1})^\dagger \dots (a^{i_m})^\dagger|\Omega\rangle \quad , \quad 0 \leq m \leq N \quad , \quad i_k \neq i_l \text{ für } k \neq l \quad , \tag{78}$$

wobei $|\Omega\rangle$ der Zustand ist, für den $a^i|\Omega\rangle = 0$ gilt. Man kann zeigen, dass die Operatoren $(a^i)^\dagger$ die Helizität um 1/2 erhöhen, während die Operatoren a^i die Helizität um 1/2 erniedrigen ([5], Seite 71). Die Helizitäten der auftretenden Einteilchenzustände sind folglich durch die Helizität von $|\Omega\rangle$ gegeben. Da alle Lorentz-kovarianten lokalen Feldtheorien CPT-Symmetrie aufweisen, muss notwendiger Weise zu jedem Zustand mit negativer Helizität ein entsprechender mit positiver Helizität existieren und umgekehrt (die Helizität wechselt unter CPT-Umkehr das Vorzeichen). Im Allgemeinen wird sich auf Grund dieser Forderung die Anzahl der Zustände verdoppeln. Tabelle 1 zeigt die Anzahl der Zustände zweier gängiger masseloser $N = 1$ Supersymmetrie-Multipletts.

Helizität	-1	$-1/2$	0	$+1/2$	$+1$
Anzahl der Zustände ($N = 1$ chirales Multiplett)	0	1	1+1	1	0
Anzahl der Zustände ($N = 1$ Eichmultiplett)	1	1	0	1	1

Tabelle 1: Zustände im masselosen chiralen und im masselosen Eichmultiplett ($N = 1$).

4.3 Massive Teilchen

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass die Supersymmetrie-Algebra keine zentralen Ladungen besitzt, das heißt $Z^{ij} = 0$. Ähnliche Untersuchungen für $Z^{ij} \neq 0$ finden sich zum Beispiel in [6], Seite 18 bis 20.

Es werden massive Teilchen ($P^2 = m^2 > 0$) im Ruhesystem ($P_\mu = (m, 0, 0, 0)$) betrachtet. (58) vereinfacht sich zu

$$\{Q_\alpha^i, \overline{Q}_{\dot\beta}^j\} = \delta^{ij}\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}_{\alpha\dot\beta} \quad . \tag{79}$$

Einsetzen der Reskalierungen

$$a_\alpha^i = \frac{1}{\sqrt{2m}}Q_\alpha^i \quad , \quad (a_\alpha^i)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m}}\overline{Q}_{\dot\alpha}^i \tag{80}$$

in (59) und (79) führt auf die Algebra

$$\{a^i_\alpha,(a^j_\beta)^\dagger\} \;=\; \delta^{ij}\delta_{\alpha\beta} \quad,\quad \{a^i_\alpha,a^j_\beta\} \;=\; 0 \quad,\quad \{(a^i_\alpha)^\dagger,(a^j_\beta)^\dagger\} \;=\; 0 \quad. \tag{81}$$

Dies entspricht der Algebra von $2N$ fermionischen Erzeugern und $2N$ fermionischen Vernichtern. Es gibt demnach die 2^{2N} Zustände

$$(a_1^{i_1})^\dagger \dots (a_1^{i_m})^\dagger (a_2^{j_1})^\dagger \dots (a_2^{j_n})^\dagger|\Omega\rangle \quad,\quad 0\le m,n\le N \quad,\quad i_k\neq i_l \text{ und } j_k\neq j_l \text{ für } k\neq l \quad, \tag{82}$$

wobei $|\Omega\rangle$ der Zustand ist, für den $a^i_\alpha|\Omega\rangle = 0$ gilt. Ist s der Gesamtspin von $|\Omega\rangle$, so ist der maximale Gesamtspin $s+N/2$ und der minimale Gesamtspin $\max(0,s-N/2)$ ([5], Seite 74 und 75). Tabelle 2 zeigt die Anzahl der Zustände des am häufigsten auftretenden massiven Supersymmetrie-Multipletts.

Gesamtspin	0	1/2
Anzahl der Zustände ($N=1$ chirales Multiplett)	2	2

Tabelle 2: Zustände im massiven chiralen Multiplett ($N=1$).

5 Das masselose Wess-Zumino-Modell: Eine supersymmetrische Feldtheorie

In diesem Kapitel wird eine der einfachsten supersymmetrischen Feldtheorien vorgestellt, das masselose Wess-Zumino-Modell. Für alle folgenden Betrachtungen gilt $N=1$.

5.1 Supersymmetrie-Transformationen und deren Kommutator

Eine Supersymmetrie-Transformation U wird durch die Grassmannvariablen ξ und $\overline{\xi}$ festgelegt. Eine infinitesimale Supersymmetrie-Transformation hat die Form

$$U(\xi,\overline{\xi}) \;=\; 1+\xi Q+\overline{\xi Q} \;=\; 1+\delta_\xi \quad. \tag{83}$$

Damit folgt $\delta_\xi(\phi^*) = (\delta_\xi\phi)^*$ für beliebige Felder ϕ was zu reellen Veränderungen der sich aus diesen Feldern zusammensetzenden Lagrange-Dichte führt. Mit Hilfe der Grassmannvariablen ξ und η kann die Supersymmetrie-Algebra (58) bis (63) vollständig durch Kommutatorrelationen ausgedrückt werden. Es gilt unter anderem

$$\begin{aligned}
[\xi Q,\overline{\eta}\overline{Q}] \;&=\; [\xi Q,\overline{Q}\overline{\eta}] \;=\; [\xi^\alpha Q_\alpha,\overline{Q}_{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\beta}] \;=\; \xi^\alpha Q_\alpha\overline{Q}_{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\beta} - \overline{Q}_{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\beta}\xi^\alpha Q_\alpha \;= \\
&=\; \xi^\alpha Q_\alpha\overline{Q}_{\dot\beta}\overline{\eta}^{\dot\beta} + \xi^\alpha\overline{Q}_{\dot\beta}Q_\alpha\overline{\eta}^{\dot\beta} \;=\; \xi^\alpha\{Q_\alpha,\overline{Q}_{\dot\beta}\}\overline{\eta}^{\dot\beta} \;=\; \xi^\alpha 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}P_\mu\overline{\eta}^{\dot\beta} \;=\; 2\xi\sigma^\mu\overline{\eta}P_\mu &(84)\\
[\xi Q,\eta Q] \;&=\; 0 &(85)\\
[\overline{\xi Q},\overline{\eta}\overline{Q}] \;&=\; 0 \quad. &(86)
\end{aligned}$$

Für den Kommutator zweier infinitesimaler Supersymmetrie-Transformationen $U(\xi,\overline{\xi})$ und $U(\eta,\overline{\eta})$ folgt

$$\begin{aligned}
[U(\xi,\overline{\xi}),U(\eta,\overline{\eta})] \;&=\; [1+\delta_\xi, 1+\delta_\eta] \;=\; [\delta_\xi,\delta_\eta] \;=\; [\xi Q+\overline{\xi Q}, \eta Q+\overline{\eta Q}] \;= \\
&= [\xi Q,\eta Q]+[\overline{\xi Q},\eta Q]+[\xi Q,\overline{\eta Q}]+[\overline{\xi Q},\overline{\eta Q}] \;=\; -[\eta Q,\overline{\xi Q}]+[\xi Q,\overline{\eta Q}] \;= \\
&= -2\eta\sigma^\mu\overline{\xi}P_\mu+2\xi\sigma^\mu\overline{\eta}P_\mu \;=\; -2\Big(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}-\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\Big)P_\mu \;=\; -2i\Big(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}-\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\Big)\partial_\mu \quad . \qquad (87)
\end{aligned}$$

5.2 Das chirale Multiplett

In diesem Abschnitt wird eine irreduzible Darstellung der Supersymmetrie-Algebra in Form von Feldern konstruiert. Die auf diese Felder wirkenden Operatoren müssen die Kommutatorrelation (87) erfüllen.

Aus (58) ist ersichtlich, dass Q und $\overline{Q}$ eine Massendimension von 1/2 haben. Felder mit Massendimension M transformieren sich demnach unter supersymmetrischen Transformationen in Felder der Massendimension $M+1/2$ oder in Ableitungen von Feldern niedrigerer Massendimension (die Massendimension einer Ableitung ist 1).

Sei A das Feld mit niedrigster Massendimension. Als Ansatz für sein supersymmetrisches Transformationsverhalten wird

$$\delta_\xi A \;=\; \sqrt{2}\xi\psi \qquad (88)$$

gewählt, das heißt ψ ist per Definition das Feld, in das sich A transformiert. ψ kann sich in ein Feld mit einer um 1/2 höheren Massendimension oder in eine Ableitung von A transformieren. Das Transformationsverhalten von ψ hat demnach die Form

$$\delta_\xi\psi \;=\; c_1\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu A + c_2\xi F \quad . \qquad (89)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 müssen so gewählt werden, dass (87) erfüllt ist. Der Kommutator zweier Supersymmetrie-Transformationen angewandt auf A liefert

$$\begin{aligned}
[\delta_\xi,\delta_\eta]A \;&=\; \delta_\xi\delta_\eta A-\delta_\eta\delta_\xi A \;=\; \delta_\xi\sqrt{2}\eta\psi-\delta_\eta\sqrt{2}\xi\psi \;=\; \sqrt{2}\eta\delta_\xi\psi-\sqrt{2}\xi\delta_\eta\psi \;= \\
&= \sqrt{2}\eta\Big(c_1\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu A+c_2\xi F\Big)-\sqrt{2}\xi\Big(c_1\sigma^\mu\overline{\eta}\partial_\mu A+c_2\eta F\Big) \;= \\
&= \sqrt{2}c_1\Big(\eta\sigma^\mu\overline{\xi}-\xi\sigma^\mu\overline{\eta}\Big)\partial_\mu A \quad . \qquad (90)
\end{aligned}$$

Vergleich von (87) und (90) führt auf $c_1=-\sqrt{2}i$. Für den Kommutator zweier Supersymmetrie-Transformationen angewandt auf ψ gilt

$$\begin{aligned}
[\delta_\xi,\delta_\eta]\psi \;&=\; \delta_\xi\delta_\eta\psi-\delta_\eta\delta_\xi\psi \;=\; \delta_\xi\Big(-\sqrt{2}i\sigma^\mu\overline{\eta}\partial_\mu A+c_2\eta F\Big)-\delta_\eta\Big(-\sqrt{2}i\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu A+c_2\xi F\Big) \;= \\
&= -\sqrt{2}i\Big(\sigma^\mu\overline{\eta}\partial_\mu\delta_\xi A-\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu\delta_\eta A\Big)+c_2\Big(\eta\delta_\xi F-\xi\delta_\eta F\Big) \;= \\
&= -\sqrt{2}i\Big(\sigma^\mu\overline{\eta}\partial_\mu(\sqrt{2}\xi\psi)-\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu(\sqrt{2}\eta\psi)\Big)+c_2\Big(\eta\delta_\xi F-\xi\delta_\eta F\Big) \;= \\
&= -2i\Big(\sigma^\mu\overline{\eta}(\xi\partial_\mu\psi)-\sigma^\mu\overline{\xi}(\eta\partial_\mu\psi)\Big)+c_2\Big(\eta\delta_\xi F-\xi\delta_\eta F\Big) \;=
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2i\Big(\xi(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\overline{\eta}) + \partial_\mu\psi(\sigma^\mu\overline{\eta}\xi) - \eta(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\overline{\xi}) - \partial_\mu\psi(\sigma^\mu\overline{\xi}\eta)\Big) + c_2\Big(\eta\delta_\xi F - \xi\delta_\eta F\Big) = \\
&= 2i\Big(\sigma^\mu\overline{\eta}\xi - \sigma^\mu\overline{\xi}\eta\Big)\partial_\mu\psi + \xi\Big(2i\partial_\mu\psi\sigma^\mu\overline{\eta} - c_2\delta_\eta F\Big) - \eta\Big(2i\partial_\mu\psi\sigma^\mu\overline{\xi} - c_2\delta_\xi F\Big) = \\
&= -2i\Big(\eta\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\overline{\eta}\Big)\partial_\mu\psi - \xi\Big(2i\overline{\eta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + c_2\delta_\eta F\Big) + \eta\Big(2i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + c_2\delta_\xi F\Big) \quad . \qquad (91)
\end{aligned}
$$

((52) wurde verwendet). (87) wird erfüllt, wenn die Veränderung von F unter infinitesimaler Supersymmetrie-Transformation

$$
\delta_\xi F = -\frac{2i}{c_2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \qquad (92)
$$

beträgt. Abschließend muss noch sichergestellt werden, dass die Anwendung des Kommutators zweier Supersymmetrie-Transformationen auf F ebenfalls mit (87) verträglich ist:

$$
\begin{aligned}
[\delta_\xi, \delta_\eta]F &= \delta_\xi\delta_\eta F - \delta_\eta\delta_\xi F = \delta_\xi\left(-\frac{2i}{c_2}\overline{\eta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) - \delta_\eta\left(-\frac{2i}{c_2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) = \\
&= -\frac{2i}{c_2}\Big(\overline{\eta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\delta_\xi\psi - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\delta_\eta\psi\Big) = \\
&= -\frac{2i}{c_2}\Big(\overline{\eta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu(-\sqrt{2}i\sigma^\nu\overline{\xi}\partial_\nu A + c_2\xi F) - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu(-\sqrt{2}i\sigma^\nu\overline{\eta}\partial_\nu A + c_2\eta F)\Big) = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{c_2}\Big(\overline{\eta}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi} - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\eta}\Big)\partial_\mu\partial_\nu A - 2i\Big(\overline{\eta}\overline{\sigma}^\mu\xi - \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\eta\Big)\partial_\mu F = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{c_2}\Big(\overline{\eta}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi} - \overline{\eta}\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\xi}\Big)\partial_\mu\partial_\nu A - 2i\Big(\eta\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\overline{\eta}\Big)\partial_\mu F = \\
&= -2i\Big(\eta\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\overline{\eta}\Big)\partial_\mu F \quad . \qquad (93)
\end{aligned}
$$

c_2 kann beliebig gewählt werden, im Folgenden $c_2 = \sqrt{2}$. Die Felder A, ψ und F bilden zusammen mit den in den Gleichungen (88), (89) und (92) definierten Wirkungen der Supersymmetrie-Transformationen eine irreduzible Darstellung der Supersymmetrie-Algebra, die als chirales Multiplett bezeichnet wird.

5.3 Das masselose Wess-Zumino-Modell

Eine supersymmetrische Feldtheorie wird durch eine Wirkung beschrieben, die invariant unter Supersymmetrie-Transformationen ist. Eine invariante Wirkung, die von den Feldern A, ψ und F abhängt, ist durch

$$
S[A,\psi,F] = \int d^4x\,\mathcal{L} \quad , \quad \mathcal{L} = (\partial^\mu A^*)(\partial_\mu A) - i(\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu\psi + F^*F \qquad (94)
$$

gegeben. Die dadurch beschriebene supersymmetrische Feldtheorie wird masseloses Wess-Zumino-Modell genannt [7]. Um nachzuweisen, dass S invariant unter einer Supersymmetrie-Transformation $U(\xi,\overline{\xi})$ ist, wird im Folgenden gezeigt, dass sich $\mathcal{L}$ lediglich um eine Divergenz verändert.

Transformationsverhalten von A^*:

$$
\delta_\xi A^* = (\delta_\xi A)^* = \left(\sqrt{2}\xi\psi\right)^* = \sqrt{2}\overline{\xi\psi} \quad . \qquad (95)
$$

Transformationsverhalten von $(\partial^\mu A^*)(\partial_\mu A)$:

$$\begin{aligned}\delta_\xi((\partial^\mu A^*)(\partial_\mu A)) &= (\partial^\mu \delta_\xi A^*)(\partial_\mu A) + (\partial^\mu A^*)(\partial_\mu \delta_\xi A) = \\ &= \sqrt{2}\Big(\overline{\xi}(\partial^\mu \overline{\psi})(\partial_\mu A) + \xi(\partial_\mu \psi)(\partial^\mu A^*)\Big) \quad . \end{aligned} \tag{96}$$

Transformationsverhalten von $\overline{\psi}_{\dot\alpha}$:

$$\begin{aligned}\delta_\xi \overline{\psi}_{\dot\alpha} &= \delta_\xi (\psi_\alpha)^* = (\delta_\xi \psi_\alpha)^* = \Big(-\sqrt{2}i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}\partial_\mu A + \sqrt{2}\xi_\alpha F\Big)^* = \\ &= \sqrt{2}i\xi^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}(\partial_\mu A)^* + \sqrt{2}\overline{\xi}_{\dot\alpha}F^* \quad . \end{aligned} \tag{97}$$

Transformationsverhalten von $-i(\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu\psi$ ((39) und (40) werden verwendet):

$$\begin{aligned}\delta_\xi(-i(\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu\psi) &= -i(\delta_\xi\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu\psi - i(\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu(\delta_\xi\psi) = \\ &= i(\delta_\xi\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi) - i(\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu(\delta_\xi\psi) + \text{div.} = \\ &= i\Big(\sqrt{2}i\xi\sigma^\nu\partial_\nu A^* + \sqrt{2}\overline{\xi}F^*\Big)\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi) - i(\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu\Big(-\sqrt{2}i\sigma^\nu\overline{\xi}\partial_\nu A + \sqrt{2}\xi F\Big) + \text{div.} = \\ &= -\sqrt{2}\Big(\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi)(\partial_\nu A^*) + (\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\xi}(\partial_\nu A)\Big) + \sqrt{2}i\Big(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi)F^* - (\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu\xi F\Big) + \\ &\quad +\text{div.} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\xi(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu + \sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu)(\partial_\mu\psi)(\partial_\nu A^*) + (\partial_\mu\overline{\psi})(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\overline{\xi}(\partial_\nu A)\Big) + \\ &\quad +\sqrt{2}i\Big(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi)F^* + \xi\sigma^\mu(\partial_\mu\overline{\psi})F\Big) + \text{div.} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\xi(2\eta^{\nu\mu})(\partial_\mu\psi)(\partial_\nu A^*) + (\partial_\mu\overline{\psi})(2\eta^{\nu\mu})\overline{\xi}(\partial_\nu A)\Big) + \\ &\quad +\sqrt{2}i\Big(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi)F^* + \xi\sigma^\mu(\partial_\mu\overline{\psi})F\Big) + \text{div.} = \\ &= -\sqrt{2}\Big(\xi(\partial^\mu\psi)(\partial_\mu A^*) + \overline{\xi}(\partial^\mu\overline{\psi})(\partial_\mu A)\Big) + \sqrt{2}i\Big(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi)F^* + \xi\sigma^\mu(\partial_\mu\overline{\psi})F\Big) + \text{div.} \quad . \end{aligned} \tag{98}$$

Transformationsverhalten von F^*:

$$\delta_\xi F^* = (\delta_\xi F)^* = \Big(-\sqrt{2}i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\Big)^* = -\sqrt{2}i\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} \quad . \tag{99}$$

Transformationsverhalten von F^*F:

$$\begin{aligned}\delta_\xi(F^*F) &= (\delta_\xi F^*)F + F^*(\delta_\xi F) = \Big(-\sqrt{2}i\xi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}\Big)F + F^*\Big(-\sqrt{2}i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\Big) = \\ &= -\sqrt{2}i\Big(\xi\sigma^\mu(\partial_\mu\overline{\psi})F + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi)F^*\Big) \quad . \end{aligned} \tag{100}$$

Aus (96), (98) und (100) folgt

$$\delta_\xi\mathcal{L} = \delta_\xi((\partial^\mu A^*)(\partial_\mu A)) + \delta_\xi(-i(\partial_\mu\overline{\psi})\overline{\sigma}^\mu\psi) + \delta_\xi(F^*F) = \text{div.} \quad , \tag{101}$$

das heißt, $\mathcal{L}$ verändert sich unter einer supersymmetrischen Transformation nur um eine Divergenz.

Die Bewegungsgleichungen der Felder sind durch das Wirkungsprinzip bestimmt. Sie lauten

$$\Box A = 0 \tag{102}$$

$$i\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi = 0 \tag{103}$$

$$F = 0 \quad . \tag{104}$$

Beschränkt man sich bei der Betrachtung von Feldkonfigurationen ausschließlich auf Lösungen der Bewegungsgleichungen, kann auf das Feld F vollständig verzichtet werden, da stets $F = 0$ gilt. F besitzt die Rolle eines Hilfsfeldes um eine "Off-Shell-Formulierung" einer supersymmetrischen Feldtheorie zu erhalten (notwendig zum Beispiel bei der Verwendung von Pfadintegralen).

Literatur

[1] D. Bailin and A. Love. *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory.* IOP Publishing, 1994.

[2] S. R. Coleman and J. Mandula. All possible symmetries of the s-matrix. *Physical Review*, 159:1251–1256, 1967.

[3] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius. All possible generators of supersymmetries of the s-matrix. *Nuclear Physics*, B88:257–274, 1975.

[4] L. H. Ryder. *Quantum field theory.* Cambridge University Press, 2002.

[5] M. F. Sohnius. Introducing supersymmetry. *Physics Reports*, 128(2&3):39–204, 1985.

[6] J. Wess and J. Bagger. *Supersymmetry and Supergravity.* Princeton University Press, 1992.

[7] J. Wess and B. Zumino. Supergauge transformations in four dimensions. *Nuclear Physics*, B70:39–50, 1974.