

Wie berechnet man die Masse eines Hadrons mit Hilfe eines Computers?

Physikalisches Kolloquium, Technische Universität Kaiserslautern

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main, Institut für Theoretische Physik

mwagner@th.physik.uni-frankfurt.de

<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~mwagner/>

22. Januar 2018



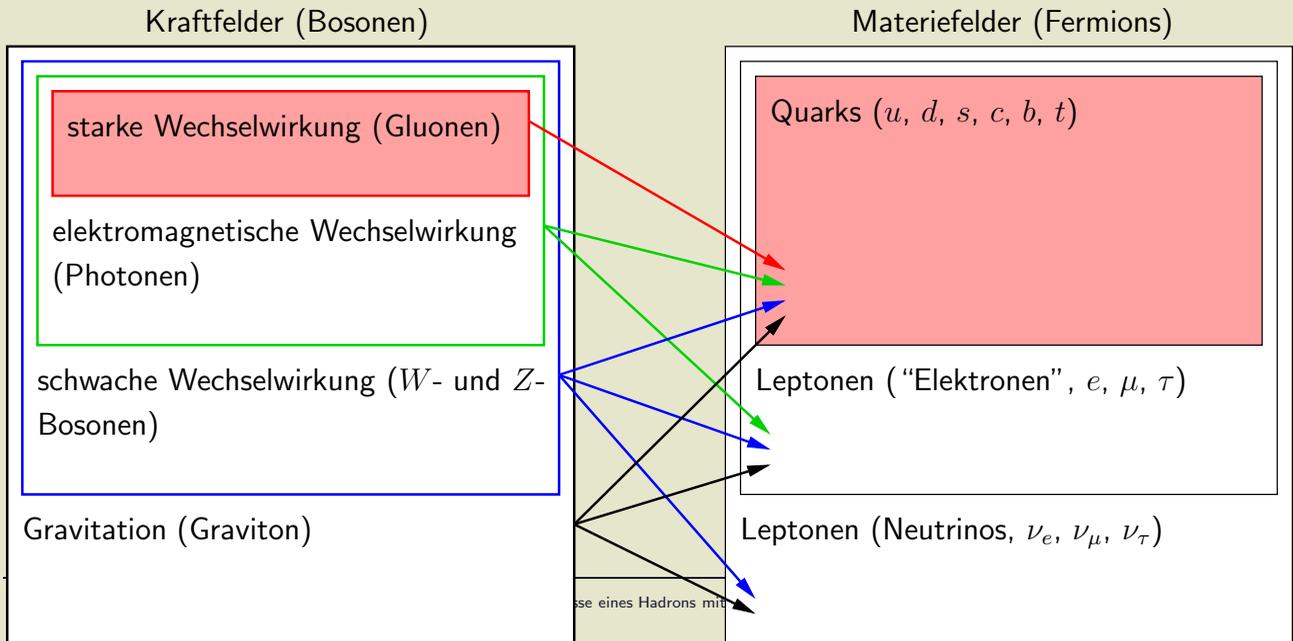
Gliederung

- **Teil 1:**
Grundlagen der QCD (Quantenchromodynamik) und Gitter-QCD.
- **Teil 2:**
Gitter-QCD-Untersuchung von Mesonen und Tetraquark-Kandidaten.
 - (a) D -Mesonen, D_s -Mesonen und Charmonium.
 - (b) Schwere Tetraquark-Kandidaten.

**Teil 1: Grundlagen der QCD
(Quantenchromodynamik) und
Gitter-QCD**

“Standardmodell der Teilchenphysik”

- Vier fundamentale Kräfte, vermittelt durch Eichbosonen.
- Materie: Sechs Sorten von Quarks, sechs Sorten von Leptonen.
- **QCD**: Physikalische Theorie, die die Wechselwirkung von **Quarks** und **Gluonen** beschreibt ... und damit den Aufbau, die Masse und mögliche Zerfälle von daraus zusammengesetzten Systemen, z.B. Proton oder Neutron.



QCD: Quarks und Gluonen

- **Quarks und Antiquarks** (Spin 1/2):

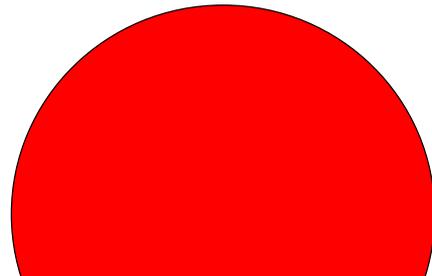
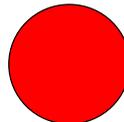
- 6 Flavours ... **up, down, strange, charm, bottom, top** (unterschiedliche Massen).
- 3 Farben ... **rot, grün, blau** (eine Art Ladung, ähnlich der elektrischen Ladung).

el. Ladung	$+2/3 e$	$-1/3 e$
	$m_{\text{up}} = 1.5 \dots 3.3 \text{ MeV}/c^2$	$m_{\text{down}} = 3.5 \dots 6.0 \text{ MeV}/c^2$
	$m_{\text{charm}} = 1160 \dots 1340 \text{ MeV}/c^2$	$m_{\text{strange}} = 70 \dots 130 \text{ MeV}/c^2$
	$m_{\text{top}} = 169100 \dots 173300 \text{ MeV}/c^2$	$m_{\text{bottom}} = 4130 \dots 4370 \text{ MeV}/c^2$

- **Gluonen** (Spin 1): (e : Elementarladung; $1 \text{ MeV}/c^2 = 1.79 \times 10^{-30} \text{ kg}$.)

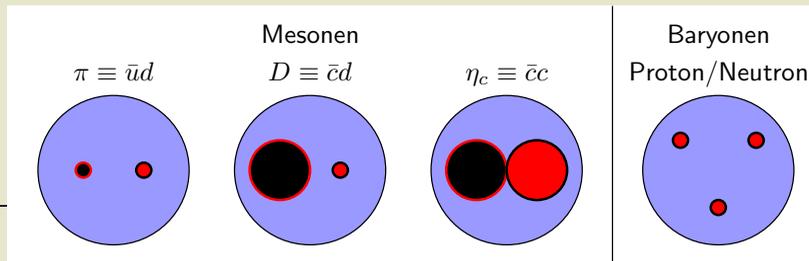
- Masselose Austauschteilchen der QCD (ähnlich den Photonen in der Elektrodynamik), vermitteln also Kräfte zwischen Quarks.
- Tragen selbst (Farb-)Ladung (im Gegensatz zu den Photonen), was zu “eigenartigen” Phänomenen führt, insbesondere **Confinement**.

$$u \rightarrow d \rightarrow s \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow t$$

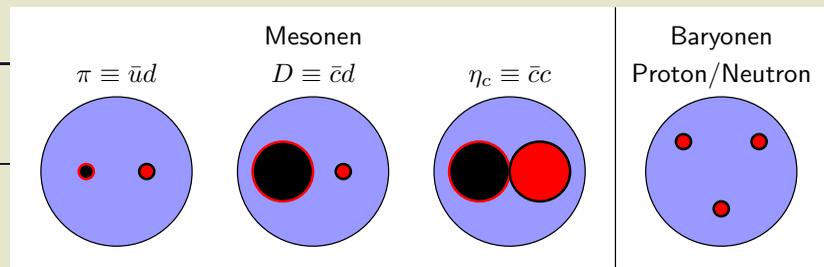


QCD: Confinement, Hadronen

- Quarks treten “niemals” isoliert auf, sondern “immer” in Gruppen, meistens Zweier- oder Dreiergruppen, sogenannten **Hadronen** (→ **Confinement**).
 - **Hadronen:**
 - **Mesonen:** Ganzzahliger Spin, i.d.R. gebundene Quark-Antiquark-Paare.
Beispiele: $\pi \equiv \bar{u}d$, $D \equiv \bar{c}d$, $\eta_s \equiv \bar{c}c$, ...
 - **Baryonen:** Halbzahliger Spin, i.d.R. drei gebundene Quarks oder Antiquarks.
Beispiele: Proton $\equiv uud$, Neutron $\equiv udd$, ...
 - Es wurden hunderte von Mesonen und Baryonen in Experimenten beobachtet; diese unterscheiden sich durch
 - * sechs Flavor-Möglichkeiten für jedes Quark/Antiquark (u, d, s, c, b, t),
 - * Quantenzahlen ähnlich zum Wasserstoffatom (radiale Quantenzahl, Gesamtdrehimpuls J , Parität P , ...).
- “Teilchenzoo”.



QCD: Definition



- Definition von QCD einfach:

$$S = \int d^4x \left(\sum_{f \in \{u,d,s,c,t,b\}} \bar{\psi}^{(f)} \left(\gamma_\mu (\partial_\mu - iA_\mu) + m^{(f)} \right) \psi^{(f)} + \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \right)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu].$$

- Keine analytischen Lösungen für z.B. Meson- oder Baryonmassen bekannt, da
 - die zugehörigen Feldgleichungen nicht-linear sind,
 - kein kleiner Parameter (Kopplungskonstante) vorhanden ist (d.h. Störungstheorie i.A. nicht anwendbar).
- Numerische Methode erforderlich
→ **Gitter-QCD**.
- In der QCD werden Teilchen durch Felder beschrieben:
 - $\psi^{(f)}(\mathbf{r}, t)$, $\bar{\psi}^{(f)}(\mathbf{r}, t)$: **Quarkfelder**.
 - $A_\mu(\mathbf{r}, t)$: **Gluonfeld**.
 - Wenn ein Feld am Raumpunkt \mathbf{r} zum Zeitpunkt t oszilliert bzw. einen von 0 verschiedenen Wert aufweist, befindet sich bei (\mathbf{r}, t) ein entsprechendes Teilchen.

QCD: Berechnung von Hadronmassen (1)

- Gitter-QCD-Bestimmung einer Hadronmasse in drei Schritten:
 - (1) Konstruiere einen geeigneten Hadron-Erzeugungsoperator O .
 - (2) Berechne die zeitliche Korrelationsfunktion $C(t)$ des Hadron-Erzeugungsoperators O numerisch mit Hilfe von Gitter-QCD.
 - (3) Bestimme die gesuchte Hadronmasse anhand des exponentiellen Abfalls der Korrelationsfunktion $C(t)$.

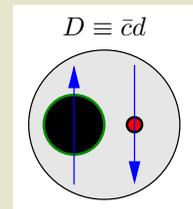
QCD: Berechnung von Hadronmassen (2)

Schritt (1): Konstruiere einen geeigneten Hadron-Erzeugungsoperator O

- Ein Hadron-Erzeugungsoperator besteht im Wesentlichen aus Quarkfeldoperatoren $\psi^{(f)}(\mathbf{r}) \equiv u(\mathbf{r}), d(\mathbf{r}), s(\mathbf{r}), c(\mathbf{r}), b(\mathbf{r}), t(\mathbf{r})$.
- Der Quarkfeldoperator $u(\mathbf{r})$ platziert ein u -Quark am Raumpunkt \mathbf{r} , $d(\mathbf{r})$ platziert ein d -Quark, usw.
- Ein **geeigneter Hadron-Erzeugungsoperator** O generiert in grober Approximation das entsprechende Hadron:
 - Feinheiten sind dabei irrelevant.
 - **Die am Ende berechnete Hadronmasse ist unabhängig von diesen Feinheiten.**
 - **Beispiel: D -Meson** ... besteht aus einem Quark-Antiquark-Paar $\bar{c}d$, hat **Gesamtdrehimpuls $J = 0$** und **Parität $P = -$** ; ein möglicher Meson-Erzeugungsoperator ist

$$O \equiv \int d^3r \bar{c}(\mathbf{r}) \gamma_5 d(\mathbf{r})$$

(γ_5 sorgt für $J^P = 0^-$, $\int d^3r$ für Impuls $\mathbf{p} = 0$).



QCD: Berechnung von Mesonmassen (3)

Schritt (2): Berechne die zeitliche Korrelationsfunktion $C(t)$ des Hadron-Erzeugungsoperators O numerisch mit Hilfe von Gitter-QCD

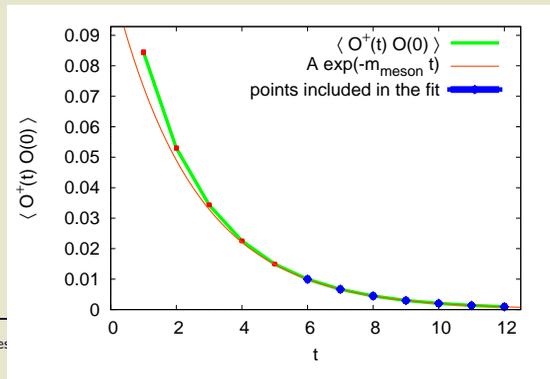
- **Korrelationsfunktion:** $C(t) \equiv \langle \Omega | O^\dagger(t) O(0) | \Omega \rangle$ ($|\Omega\rangle = \text{QCD-Grundzustand} = \text{Vakuum}$).
- Gitter-QCD technisch aufwändig:
 - Anspruchsvolle Computerprogramme müssen geschrieben werden ...
 - ... dann rechnen High-Performance-Computer mehrere Wochen oder Monate ...
 - ... Details dazu auf den nächsten Folien.

Schritt (3): Bestimme die gesuchte Hadronmasse anhand des exponentiellen Abfalls der Korrelationsfunktion $C(t)$

- Mit Hilfe elementarer Quantenmechanik ergibt sich

$$C(t) = \langle \Omega | O^\dagger(t) O(0) | \Omega \rangle \stackrel{t \rightarrow \infty}{\propto} e^{-m_D t}.$$

- Ein Fit von $Ae^{-m_D t}$ an die Gitter-QCD-Ergebnisse für $C(t)$ liefert die gesuchte Hadronmasse m_D .



Gitter-QCD (1)

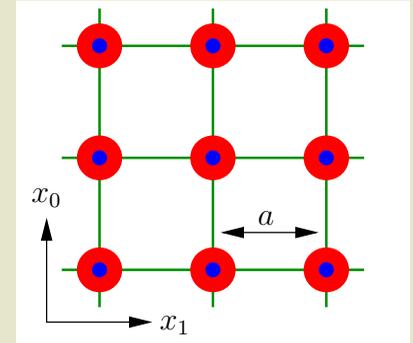
- **Ziel:** Numerische Berechnung von QCD-Observablen, z.B. eine **zeitliche Korrelationsfunktion** und damit eine Mesonmasse.
- **Ausgangspunkt:** **Pfadintegralformulierung**,

$$C(t) = \langle \Omega | O^\dagger(t) O(0) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \underbrace{\int \left(\prod_f D\psi^{(f)} D\bar{\psi}^{(f)} \right) DA_\mu \dots}_{\text{Pfad- oder Funktionalintegral}}$$

- $\int (\prod_f D\psi^{(f)} D\bar{\psi}^{(f)}) DA_\mu$ wird als **Pfadintegral** bezeichnet ...
- ... es handelt sich um ein Integral über alle denkbaren Quark- und Gluonfeldkonfigurationen $\psi^{(f)}(\mathbf{r}, t)$ und $A_\mu(\mathbf{r}, t)$...
- ... also ein Integral über einen ganzen Funktionenraum ...
- ... an jedem der unendlich vielen Raumzeitpunkte (\mathbf{r}, t) muss ein “normales Integral” über die Feldwerte $\psi^{(f)}(\mathbf{r}, t)$ und $A_\mu(\mathbf{r}, t)$ ausgeführt werden ...
- ... **damit ein unendlich-dimensionales Integral!**

Gitter-QCD (2)

- Numerische Umsetzung des Pfadintegralformalismus:
 - Diskretisiere die Raumzeit mit einem kubischen Gitter mit hinreichend kleinem Gitterabstand $a \approx 0.05 \text{ fm} \dots 0.10 \text{ fm}$
→ **Kontinuumsphysik**.
 - Kompaktifiziere die Raumzeit mit hinreichend großer Ausdehnung $L \approx 2.0 \text{ fm} \dots 4.0 \text{ fm}$ (4-dimensionaler Torus)
→ **Keine Finite-Size-Effekte**.



- Pfadintegral reduziert auf ordinäres endlichdimensionales Integral,

$$\int \left(\prod_f D\psi^{(f)} D\bar{\psi}^{(f)} \right) DA_\mu \rightarrow \prod_{x_\nu \in \text{Gitter}} \left(\prod_f d\psi^{(f)}(x_\nu) d\bar{\psi}^{(f)}(x_\nu) \right) dU_\mu(x_\nu).$$

- Typische heutige Dimension eines QCD-Pfadintegrals:

- x_ν : $32^4 \approx 10^6$ Gitterplätze.
- $\psi = \psi_A^{a,(f)}$: 24 Quarkfreiheitsgrade ($\times 2$ (Anti-)Teilchen, $\times 3$ Farbe, $\times 4$ Spin), 2 Flavours.
- $U_\mu = U_\mu^{ab}$: 32 Gluonfreiheitsgrade ($\times 8$ Farbe, $\times 4$ Spin).
- Insgesamt: $32^4 \times (2 \times 24 + 32) \approx 83 \times 10^6$ dimensionales Integral.

→ Speziell entwickelte stochastische Algorithmen erforderlich (→ Fehlerbalken).

→ Hochleistungscomputersysteme erforderlich (→ Zusammenschluss zu Kollaborationen).

Gitter-QCD: Ziele

- Mit Gitter-QCD-Rechnungen verfolgt man eine Vielzahl von Zielen:
 - Verifikation bzw. Falsifikation von QCD durch Vergleich von Gitter-QCD-Resultaten mit experimentellen Messergebnissen (Suche nach bisher unbekannter Physik).
 - Vorhersagen von bisher nicht in Experimenten beobachteten Mesonen oder Baryonen (→ wertvoller Input für Experimente).
 - Untersuchung der Struktur von Mesonen oder Baryonen (“*Existieren Tetraquarks?*”).
 - Auflösen von momentan existierenden Widersprüchen zwischen experimentellen Ergebnissen und theoretischen Modellrechnungen.
 - Berechnung von experimentell schwer bzw. nicht zugänglichen QCD-Observablen (z.B. QCD bei extremen Temperaturen).
 - ...

(+) Keine Annahmen. Keine Näherungen. Kein Modell. QCD-Ergebnisse.

(-) Zeitaufwändig ... Gitter-QCD-Projekte benötigen mehrere Jahre.

Teil 2a: D -Mesonen, D_S -Mesonen und Charmonium

[M. Kalinowski, M.W. [ETM Collaboration], Phys. Rev. D **92**, 094508 (2015) [arXiv:1509.02396]]

[K. Cichy, M. Kalinowski, M.W. [ETM Collaboration], Phys. Rev. D **94**, 094503 (2016) [arXiv:1603.06467]]

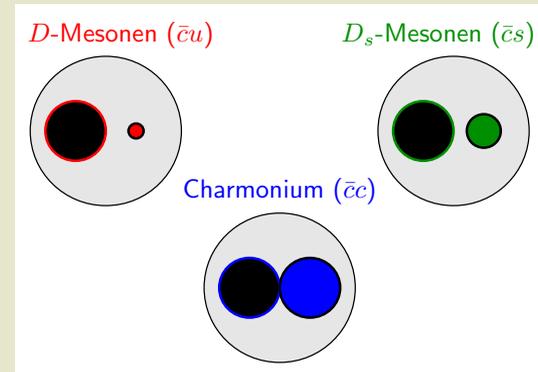
D , D_s , Charmonium (1)

- **Ziel:** Präzise Gitter-QCD-Berechnung der Massen einiger D -, D_s - und Charmonium-Zustände:

- D -Mesonen: D , D^* , D_0^* , D_1 , D_2^* , ...
- D_s -Mesonen: D_s , D_s^* , D_{s0}^* , D_{s1} , D_{s2}^* , ...
- Charmonium: η_c , J/ψ , ...

- Verwendung von Quark-Antiquark-Erzeugungsoperatoren:

- D -Mesonen $\rightarrow \bar{c}u$ oder $\bar{c}d$.
- D_s -Mesonen $\rightarrow \bar{c}s$.
- Charmonium $\rightarrow \bar{c}c$.



→ Erfolgversprechend für Mesonen mit Quark-Antiquark-Struktur (nicht geeignet z.B. für Tetraquarkkandidaten ... D_{s0}^* , D_{s1} ...?).

- Meson-Erzeugungsoperatoren unterscheiden sich nicht nur im Quarkinhalt, sondern auch

- im Bahndrehimpuls L und Spin S ,
- in den Quantenzahlen Gesamtdrehimpuls J , Parität P , Ladungskonjugation C .

→ Rechnung kann entsprechende Strukturen auflösen und zwischen ihnen unterscheiden.



[Home](#) [News](#) [Meetings](#) [Collaboration](#) [Computing](#) [Detector](#) [Physics](#) [Documents](#) [Communications](#)

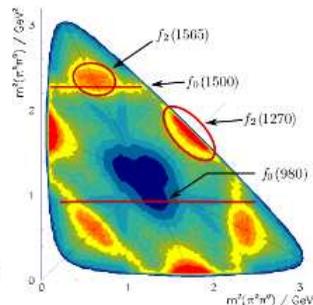
[Overview](#) [Spectroscopy](#) [Hadrons in Matter](#) [Nucleon Structure](#) [Hypernuclei](#) [Theory Advisory Grp](#)

Physics - Hadron Spectroscopy

Search for Gluonic Excitations

One of the main challenges of hadron physics is the search for gluonic excitations, i.e. hadrons in which the gluons can act as principal components. These gluonic hadrons fall into two main categories: glueballs, i.e. states where only gluons contribute to the overall quantum numbers, and hybrids, which consist of valence quarks and antiquarks as hadrons plus one or more excited gluons which contribute to the overall quantum numbers.

The additional degrees of freedom carried by gluons allow these hybrids and glueballs to have J^{PC} exotic quantum numbers. In this case mixing effects with nearby qq states are excluded and this makes their experimental identification easier. The properties of glueballs and hybrids are determined by the long-distance features of QCD and their study will yield fundamental insight into the structure of the QCD vacuum. Antiproton-proton annihilations provide a very favourable environment to search for gluonic hadrons.



Charmonium Spectroscopy

The charmonium spectrum can be calculated within the framework of non-relativistic potential models, EFT and LQCD. All 8 charmonium states below open charm threshold are known, but the measurements of their parameters and decays is far from complete (e.g. width and decay modes of h_c and $n_c(2S)$). Above threshold very little is known: on one hand the expected D- and F- wave states have not been identified (with the possible exception of the $\psi(3770)$, mostly $3D_1$), on the other hand the nature of the recently discovered X, Y, Z states is not known.

At full luminosity PANDA will collect several thousand $c\bar{c}$ states per day. By means of fine scans it will be possible to measure masses with an accuracy of the order of 100 keV and widths to 10% or better. PANDA will explore the entire energy region below and above the open charm threshold, to find the missing D- and F- wave states and unravel the nature of the newly discovered X, Y, Z states.

D Meson Spectroscopy

The recent discoveries of new open charm mesons at the BaBar, Belle and CLEO has attracted much interest both in the theoretical and experimental communities since the new states do not fit into the standard classification for heavy-light mesons in terms of J^{PC} . The

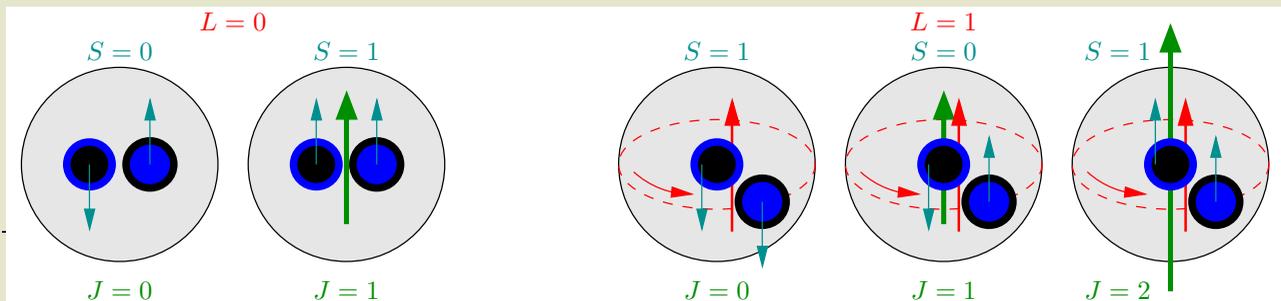
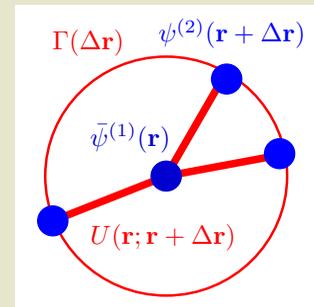
D, D_s, Charmonium (2)

- Verwende **Meson-Erzeugungsoperatoren** der Form

$$O_{\Gamma, \bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)}} \equiv \int d^3r \bar{\psi}^{(1)}(\mathbf{r}) \underbrace{\int_{|\Delta\mathbf{r}|=R} d^3\Delta\mathbf{r} U(\mathbf{r}; \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \Gamma(\Delta\mathbf{r}) \psi^{(2)}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})}_{=\text{Kugelflächenfunktion} \times \text{Spinmatrix}}$$

- Diese Meson-Erzeugungsoperatoren generieren die folgenden Quantenzahlen:

- Quarkflavor: $\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)} = \bar{c}u$ für *D*-Mesonen,
 $\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)} = \bar{c}s$ für *D_s*-Mesonen,
 $\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)} = \bar{c}c$ für Charmonium.
- Gesamtdrehimpuls $J = 0, 1, 2, \dots$, Parität $P = -, +$:
 Kugelflächenfunktion generiert Bahndrehimpuls $L = 0, 1, 2, \dots$,
 Spinmatrix generiert Spin $S = 0, 1$.
- $\int d^3x$ generiert Impuls $\mathbf{p} = 0$.



D, D_s, Charmonium (3)

- Einige hundert Meson-Erzeugungoperatoren ...

- Quarkflavor (*D*, *D_s*, Charmonium),
- Gesamtdrehimpuls $J = 0, 1, 2, \dots$,
- Parität $P = -, +$,
- Bahndrehimpuls $L = 0, 1, 2, \dots$,
- Spin $S = 0, 1$.

index	continuum			twisted mass lattice QCD		
	$\Gamma(\mathbf{n}), \text{pb}$	J	\mathcal{PC}	tb, (\pm, \mp)	tb, (\pm, \pm)	$\mathcal{O}^S \otimes \mathcal{O}^L \rightarrow \mathcal{O}^J$
1	γ_5		$-+$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	$A_1 \otimes A_1$
2	$\gamma_0 \gamma_5$		$-+$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
3	$\mathbf{1}$		$++$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
4	γ_0		$+-$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
5	$\gamma_5 \gamma_1 \mathbf{n}_1$	0	$--$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
6	$\gamma_0 \gamma_5 \gamma_1 \mathbf{n}_1$		$++$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
7	$\gamma_1 \mathbf{n}_1$		$+-$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
8	$\gamma_0 \gamma_1 \mathbf{n}_1$		$++$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
1	γ_1		$--$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	$T_1 \otimes A_1$
2	$\gamma_0 \gamma_1$		$--$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
3	$\gamma_5 \gamma_1$		$++$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
4	$\gamma_0 \gamma_5 \gamma_1$		$+-$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
5	\mathbf{n}_1		$--$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
6	$\gamma_0 \mathbf{n}_1$		$-+$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
7	$\gamma_5 \mathbf{n}_1$		$+-$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
8	$\gamma_0 \gamma_5 \mathbf{n}_1$		$+-$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
9	$(\mathbf{n} \times \vec{\eta})_1$	1	$++$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
10	$\gamma_0 (\mathbf{n} \times \vec{\eta})_1$		$++$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
11	$\gamma_5 (\mathbf{n} \times \vec{\eta})_1$		$--$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
12	$\gamma_0 \gamma_5 (\mathbf{n} \times \vec{\eta})_1$		$-+$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
13	$\gamma_1 (2\mathbf{n}_1^2 - \mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2)$		$--$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
14	$\gamma_0 \gamma_1 (2\mathbf{n}_1^2 - \mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2)$		$--$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
15	$\gamma_5 \gamma_1 (2\mathbf{n}_1^2 - \mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2)$		$++$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
16	$\gamma_0 \gamma_5 \gamma_1 (2\mathbf{n}_1^2 - \mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2)$		$+-$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
1	$(\mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 - 2\mathbf{n}_3^2)$		$++$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	$A_1 \otimes E$
2	$\gamma_0 (\mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 - 2\mathbf{n}_3^2)$		$+-$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
3	$\gamma_5 (\mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 - 2\mathbf{n}_3^2)$		$-+$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
4	$\gamma_0 \gamma_5 (\mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 - 2\mathbf{n}_3^2)$		$-+$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
5	$(\gamma_1 \mathbf{n}_1 + \gamma_2 \mathbf{n}_2 - 2\gamma_3 \mathbf{n}_3)$	2	$++$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
6	$\gamma_0 (\gamma_1 \mathbf{n}_1 + \gamma_2 \mathbf{n}_2 - 2\gamma_3 \mathbf{n}_3)$		$++$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
7	$\gamma_5 (\gamma_1 \mathbf{n}_1 + \gamma_2 \mathbf{n}_2 - 2\gamma_3 \mathbf{n}_3)$		$--$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
8	$\gamma_0 \gamma_5 (\gamma_1 \mathbf{n}_1 + \gamma_2 \mathbf{n}_2 - 2\gamma_3 \mathbf{n}_3)$		$-+$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
1	$(\gamma_2 \mathbf{n}_2 + \gamma_3 \mathbf{n}_3)$		$++$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	$T_1 \otimes T_1$
2	$\gamma_0 (\gamma_2 \mathbf{n}_2 + \gamma_3 \mathbf{n}_3)$		$++$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
3	$\gamma_5 (\gamma_2 \mathbf{n}_2 + \gamma_3 \mathbf{n}_3)$		$--$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
4	$\gamma_0 \gamma_5 (\gamma_2 \mathbf{n}_2 + \gamma_3 \mathbf{n}_3)$		$-+$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
5	$\gamma_1 (\mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2)$	2	$--$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
6	$\gamma_0 \gamma_1 (\mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2)$		$--$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	
7	$\gamma_5 \gamma_1 (\mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2)$		$++$	$\pm i \gamma_5 \times$	pb	
8	$\gamma_0 \gamma_5 \gamma_1 (\mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2)$		$+-$	pb	$\pm i \gamma_5 \times$	

D, D_S, Charmonium (4)

- Berechne **zeitliche Korrelationsmatrizen** mit Hilfe von Gitter-QCD:

$$C_{jk}(t) \equiv \underbrace{\langle \Omega | O_j^\dagger(t) | \Omega \rangle}_{\equiv \langle \text{test}_j(t) |} \underbrace{\langle O_k(0) | \Omega \rangle}_{\equiv | \text{test}_k(t) \rangle} \quad (\text{jeder Operator } O_j \text{ mit jedem anderen } O_k).$$

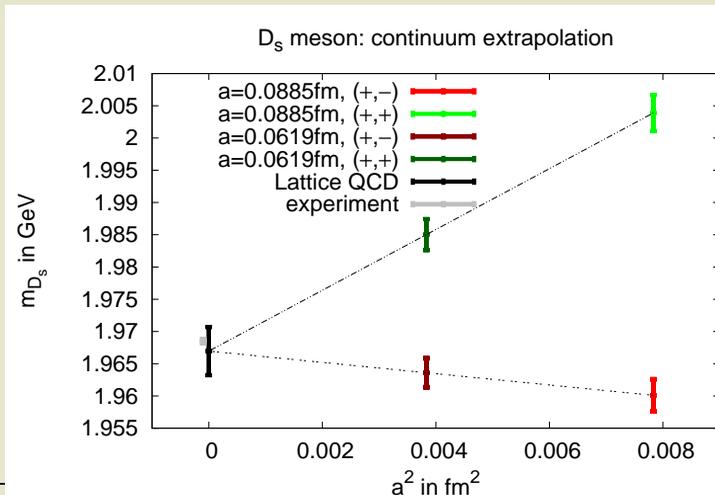
- Matrixelemente von Meson-Erzeugungsoperatoren mit Quantenzahlen (flavor, J, P, C) haben die Form

$$C_{jk}(t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\equiv} \underbrace{\langle \text{test}_j | \text{meson} \rangle}_{= a_j^*} \underbrace{\langle \text{meson} | \text{test}_k \rangle}_{\equiv a_k} e^{-m_{\text{meson}} t} \quad (1)$$

- $|\text{meson}\rangle$: Der physikalische Mesonzustand.
 - $|\text{test}_j\rangle \equiv O_j|\Omega\rangle$: Die von den Meson-Erzeugungsoperatoren generierten “Testzustände” (j indiziert z.B. verschiedene L - S -Kombinationen, die gleiches J liefern).
 - m_{meson} : Die gesuchte Mesonmasse.
 - $a_j = \langle \text{meson} | \text{test}_j \rangle \in [0, 1]$: Überlapp des physikalischen Mesonzustands und der Testzustände (liefern Informationen über die Struktur des Mesons, z.B. welcher Drehimpuls L und welcher Spin S).
- Ein Fit von (1) an Gitter-QCD-Ergebnisse für $C_{jk}(t)$ liefert m_{meson} und a_j .

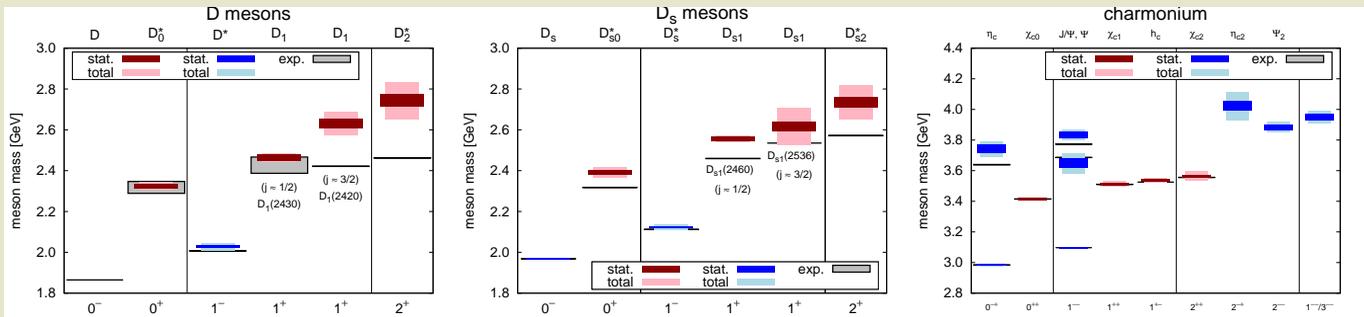
D , D_s , Charmonium (5)

- Bestimmung von Mesonmassen für verschiedene Werte des Gitterabstands a und verschiedene Gitter-Diskretisierungen.
- Dann Extrapolation ins Kontinuum, $a \rightarrow 0$.
- Beispiel: D_s -Meson (flavor = $\bar{c}s$ (charm-strange), $J^P = 0^-$).
→ Perfekte Übereinstimmung mit experimentellem Ergebnis, Fehlerbalken $\approx 0.2\%$.
- Quarkmassen $m_c + m_s = 1230 \dots 1470$ MeV
Hadronmasse $m_{D_s} = 1968$ MeV
→ $\approx 1/3$ der Hadronmasse erzeugt durch Gluonen und kurzlebige Quark-Antiquark-Paare, beschrieben durch QCD, präzise berechnet mit Gitter QCD (relativer statistischer Fehler $\approx 1\%$).



$D, D_s, \text{Charmonium (6)}$

- Analoges vorgehen für zahlreiche weitere D -, D_s - und Charmonium-Zustände.
 - **Präzise Ergebnisse für 10 bis 15 Zustände** (z.B. $D, D^*, D_s, D_s^*, \eta_c, J/\psi, \chi_{c0}, \chi_{c1}, \chi_{c2}, h_c$), **Übereinstimmung mit Experimenten.**
 - (+) **Die Masse der Mesonen entspricht nicht annähernd der Summe der Quarkmassen, d.h. zu den Mesonmassen tragen ausgetauschte Gluonen und virtuelle Quark-Antiquark-Paare signifikant bei; diese Dynamik der starken WW wird vollständig erfasst.**
 - **Identifikation problematischer Kandidaten** (z.B. D_{s0}^*, D_{s1}) ... **instabile Mesonen, Tetraquarks ...?**
 - **Vorhersage der Massen experimentell noch nicht beobachteter bzw. klassifizierter Mesonen** (Charmonium-Zustände mit $J^{PC} = 2^{--}, 2^{-+}, 3^{--}$).



Teil 2b: Schwere Tetraquark-Kandidaten in der Born-Oppenheimer-Approximation

[P. Bicudo, M.W., Phys. Rev. D **87**, 114511 (2013) [arXiv:1209.6274]]

[P. Bicudo, K. Cichy, A. Peters, B. Wagenbach, M.W., Phys. Rev. D **92**, 014507 (2015) [arXiv:1505.00613]]

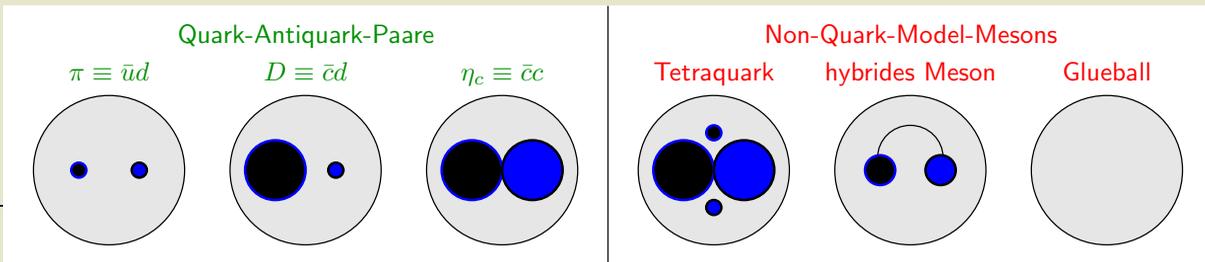
[P. Bicudo, K. Cichy, A. Peters, M.W., Phys. Rev. D **93**, 034501 (2016) [arXiv:1510.03441]]

[P. Bicudo, J. Scheunert, M.W., Phys. Rev. D **95**, 034502 (2017) [arXiv:1612.02758]]

[P. Bicudo, M. Cardoso, A. Peters, M. Pflaumer, M.W., Phys. Rev. D **96**, 054510 (2017) [arXiv:1704.02383]].

Mesonen und Tetraquarks (1)

- **Mesonen:** Gebundene Systeme von Quarks und Gluonen mit ganzzahligem Spin/Gesamtdrehimpuls $J = 0, 1, 2, \dots$
- Die meisten Mesonen scheinen **Quark-Antiquark-Paare** zu sein (z.B. $\pi \equiv \bar{u}d$, $D \equiv \bar{c}d$, $\eta_s \equiv \bar{c}c$):
 - Die experimentell beobachteten Mesontypen und deren Massen entsprechen der vom Quark-Antiquark-Bild ausgehenden Erwartung.
 - Quark-Antiquark-Modellrechnungen liefern mit Experimenten konsistente Ergebnisse.
- Einige Mesonen passen nicht ins Bild und sind seit vielen Jahren unverstanden:
 - Sie könnten eine kompliziertere Struktur besitzen, z.B.
 - * **zwei Quarks und zwei Antiquarks (Tetraquark)**,
 - * **ein Quark-Antiquark-Paar und Gluonen (hybrides Meson)**,
 - * **nur Gluonen (Glueball)**.



Mesonen und Tetraquarks (2)

- Hinweise auf eine Tetraquarkstruktur:

– Leichte skalare Mesonen ($J^P = 0^+$):

- * $a_0(980)$ -Meson: Isospin $I = 1$
 $\rightarrow \bar{u}d$ im Quark-Antiquark-Bild
 (zwei leichte u/d Quarks).
 $m_{a_0(980)} = 980 \pm 20 \text{ MeV}$.

- * κ -Meson: Isospin $I = 1/2$
 $\rightarrow \bar{s}d$ im Quark-Antiquark-Bild
 (ein leichtes u/d -Quark, ein schwereres s -Quark).
 $m_\kappa = 682 \pm 29 \text{ MeV}$.

- * **Das aus schwereren Quarks bestehende κ ist leichter als das $a_0(980)$...?**

- * **Im Tetraquark-Bild verständlich:**

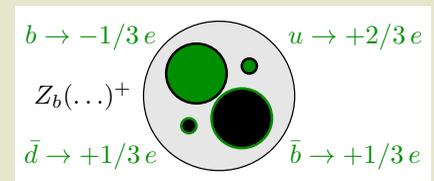
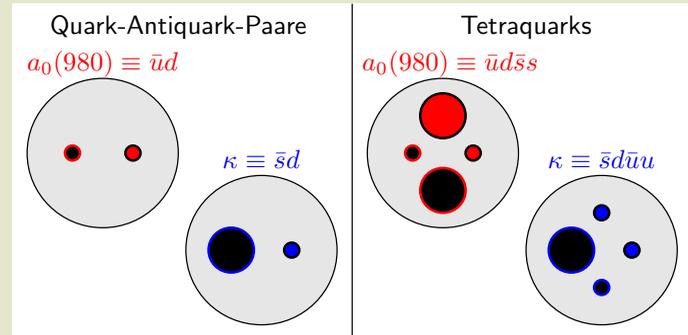
- $a_0(980) \equiv \bar{u}d\bar{s}s$.
- $\kappa \equiv \bar{s}d\bar{u}u$.

– Elektrisch geladene Mesonen $Z_b(10610)^+$ und $Z_b(10650)^+$:

- * Masse erfordert ein $b\bar{b}$ -Paar.

- * $b\bar{b}$ ist elektrisch neutral ... woher kommt also die Ladung?

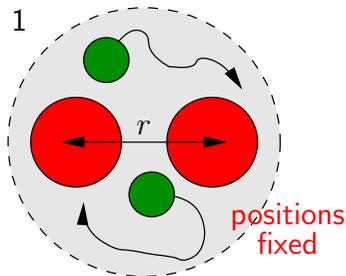
- * **Im Tetraquark-Bild $Z_b(\dots)^+ \equiv b\bar{b}u\bar{d}$ verständlich ($u \rightarrow +2/3e, \bar{d} \rightarrow -1/3e$).**



Schwere Tetraquarks, $\bar{b}\bar{b}qq$ (1)

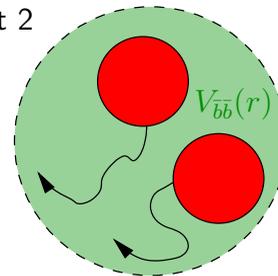
- **Grundidee:** Untersuche die Existenz von schweren Tetraquarks $\bar{b}\bar{b}qq$ in zwei Schritten.
 - (1) **Berechne Potentiale von zwei schweren Antiquarks ($\bar{b}\bar{b}$) in Anwesenheit von zwei leichteren Quarks ($qq \in \{ud, ss, cc\}$) mit Hilfe von Gitter-QCD.**
 - (2) **Prüfe, ob diese Potentiale hinreichend stark attraktiv sind, um mindestens einen gebundenen Zustand zu beherbergen, durch Lösen entsprechender Schrödinger-Gleichungen.** (→ Würde ein stabiles $\bar{b}\bar{b}qq$ -Tetraquark anzeigen.)
- (1) + (2) → **Born-Oppenheimer-Approximation:**
 - Entwickelt 1927 für Molekül- bzw. Festkörperphysik.
[M. Born, R. Oppenheimer, "Zur Quantentheorie der Molekeln," *Annalen der Physik* 389, Nr. 20, 1927]
 - Schritt (1) im Folgenden aber nicht Quantenmechanik, sondern QCD.
 - Gute Approximation, falls $m_q \ll m_b$ (sicher gut für $qq = ud$).

Schritt 1



→ $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$

Schritt 2



→ Tetraquark existiert ... oder nicht

Schwere Tetraquarks, $\bar{b}\bar{b}qq$ (2)

- **Motivation:**

- Unverstandene geladene Bottomonium-Zustände $Z_b(10610)^+$, $Z_b(10650)^+$ (müssen 4-Quark-Zustände sein).
- Eventuell auch geladene Charmonium-Zustände, z.B. $Z_c(3940)^\pm$, $Z_c(4430)^\pm$...?

- **B.-O., Schritt (1):** Gitter-QCD-Berechnung der $\bar{b}\bar{b}$ -Potentiale $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$ wie gehabt.

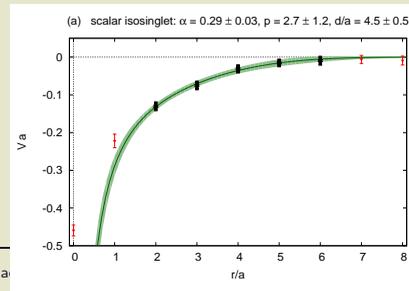
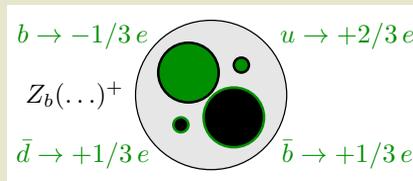
(1) Verwende $\bar{b}\bar{b}qq$ -Erzeugungsoperatoren

$$O_{\bar{b}\bar{b}qq} \equiv (C\Gamma)_{AB}(C\tilde{\Gamma})_{CD} \left(\bar{b}_C(-\mathbf{r}/2)q_A^{(1)}(-\mathbf{r}/2) \right) \left(\bar{b}_D(+\mathbf{r}/2)q_B^{(2)}(+\mathbf{r}/2) \right)$$

(unterschiedliche **leichte Quark-Flavors** $qq \in \{ud, ss, cc\}$ und **Quarkspin/Parität**).

(2) Berechne zeitliche Korrelationsfunktionen.

(3) Extrahiere $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$ anhand des exponentiellen Abfalls der Korrelationsfunktionen.



Schwere Tetraquarks, $\bar{b}\bar{b}qq$ (3)

- **B.-O., Schritt (2):** Löse die Schrödinger-Gleichung für die Relativkoordinate \mathbf{r} der beiden \bar{b} -Quarks,

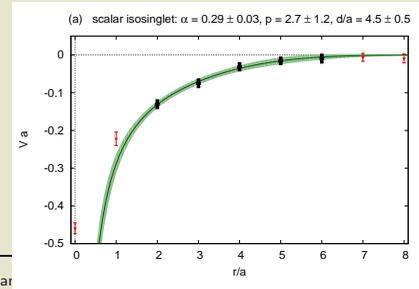
$$\left(-\frac{1}{2\mu}\Delta + V_{\bar{b}\bar{b}}(r) \right) \underbrace{\psi(\mathbf{r})}_{=R(r)/r} = E\psi(\mathbf{r}) \quad , \quad \mu = m_b/2;$$

gegebenenfalls existierende gebundene Zustände, d.h. $E < 0$, zeigen $\bar{b}\bar{b}qq$ -Tetraquarks an.

- Ein gebundener Zustand für ein spezielles Potential $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$ und leichte Quarks $qq = ud$:
 - Bindungsenergie $E = -93_{-43}^{+47}$ MeV, d.h. Confidence-Level $\approx 2\sigma$.
 - Quantenzahlen des $\bar{b}\bar{b}ud$ -Tetraquarks: $I(J^P) = 0(1^+)$.

→ **Vorhersage eines Tetraquarks.** (Noch keine experimentellen Ergebnisse zu $\bar{b}\bar{b}qq$.)

- Sonst keine Bindungszustände, insbesondere nicht für $qq = ss$ oder $qq = cc$.
- Work in Progress: Der experimentell zugänglichere Fall $\bar{b}\bar{b}q\bar{q}$ (z.B. $Z_b(10610)^+$, $Z_b(10650)^+$).



Zusammenfassung

- Ziel: Ausgehend von QCD Masse und Struktur von Mesonen verstehen.
- Gitter-QCD-Bestimmung einer Mesonmasse in drei Schritten:
 - (1) Konstruiere einen geeigneten Meson-Erzeugungsoperator O .
 - (2) Berechne die zeitliche Korrelationsfunktion $C(t)$ des Meson-Erzeugungsoperators O numerisch mit Hilfe von Gitter-QCD.
 - (3) Bestimme die gesuchte Mesonmasse anhand des exponentiellen Abfalls der Korrelationsfunktion $C(t)$.
- QCD-Ergebnisse für zahlreiche Mesonmassen:
 - Direkter Vergleich mit experimentellen Ergebnissen sinnvoll (z.B. D -, D_s - und Charmonium-Massen).
 - Teilweise Vorhersage und Input für zukünftige Experimente (z.B. $\bar{b}b$ -Tetraquark).