# INFLATIONÄRE KOSMOLOGISCHE MODELLE

Marc Wagner

mcwagner@stud.informatik.uni-erlangen.de

http://wwwcip.informatik.uni-erlangen.de/∼mcwagner

Vortrag im Seminar „Phasen des frühen Universums“

3. Dezember 2002



# Inflation

**Was ist Inflation?**

- Exponentielle Ausdehnung des Universums: $R(t) \propto e^{Ht}$
- Zeitpunkt: Etwa $10^{-35}$ s bis $10^{-34}$ s nach dem Urknall
- Ausdehnung um einen Faktor von mindestens $e^{60} \approx 10^{26}$

**Warum Inflation?**

- Inflation löst verschiedene Probleme der Standardkosmologie auf elegante Art und Weise





# Gliederung des Vortrags

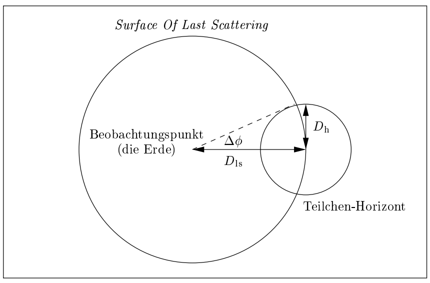
- Probleme der Standardkosmologie und inflationäre Lösungen dieser Probleme
  - Horizont-Problem
  - Flachheits-Problem
  - Monopol-Problem
  - Struktur-Problem
- Physik der Inflation
  - Grundlagen
  - Präinflationäre Phase
  - Beginn der Inflation
  - Inflationäre Phase
  - Ende der Inflation
  - Postinflationäre Phase
- Notwendige Eigenschaften erfolgreicher inflationärer Modelle
- Ein spezielles inflationäres Modell: *Chaotic Inflation*





# Horizont-Problem (1)

- Temperatur der Hintergrundstrahlung nahezu richtungsunabhängig ($\Delta T/T \approx 10^{-5}$)
- Naheliegende Erklärung: Thermisches Gleichgewicht der *Surface Of Last Scattering* zum Zeitpunkt des *Last Scattering*
- **Unmöglich in der Standardkosmologie!** Punkte auf der *Surface Of Last Scattering*, die mehr als $\approx 1°$ voneinander entfernt liegen, standen zum Zeitpunkt des *Last Scattering* nicht in kausalem Kontakt



# Horizont-Problem (2)

- Robertson-Walker-Metrik:

$$ds^2 \;=\; c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right)$$

- Einlaufender beziehungsweise auslaufender Lichtstrahl:

$$c\frac{1}{R(t)}dt \;=\; \underbrace{\pm\frac{1}{(1-kr^2)^{1/2}}dr}_{\text{Abstand in mitbewegten Koordinaten}}$$

- Teilchenhorizont zum Zeitpunkt $t_{\mathrm{ls}}$ für $R \propto t^{1/2}$ (strahlungsdominiertes Universum):

$$D_{\mathrm{h}}(t_{\mathrm{ls}}) \;=\; R(t_{\mathrm{ls}})c\int_0^{t_{\mathrm{ls}}} dt\frac{1}{R(t)} \;=$$
$$=\; R(t_{\mathrm{ls}})c\int_0^{t_{\mathrm{ls}}} dt\frac{1}{t^{1/2}}\frac{t_{\mathrm{ls}}^{1/2}}{R(t_{\mathrm{ls}})} \;= ct_{\mathrm{ls}}^{1/2}\left[2t^{1/2}\right]_0^{t_{\mathrm{ls}}} \;=\; 2ct_{\mathrm{ls}}$$



# Horizont-Problem (3)

- Abstand zur *Surface Of Last Scattering* zum Zeitpunkt $t_{\mathrm{ls}}$ für $R \propto t^{2/3}$ (massendominiertes Universum):

$$D_{\mathrm{ls}}(t_{\mathrm{ls}}) \;=\; R(t_{\mathrm{ls}})\left(-\int_{r_{\mathrm{ls}}}^0 dr\frac{1}{(1-kr^2)^{1/2}}\right) \;=$$
$$=\; R(t_{\mathrm{ls}})c\int_{t_{\mathrm{ls}}}^{t_0} dt\frac{1}{R(t)} \;=\; R(t_{\mathrm{ls}})c\int_{t_{\mathrm{ls}}}^{t_0} dt\frac{1}{t^{2/3}}\frac{t_{\mathrm{ls}}^{2/3}}{R(t_{\mathrm{ls}})} \;=$$
$$=\; ct_{\mathrm{ls}}^{2/3}\left[3t^{1/3}\right]_{t_{\mathrm{ls}}}^{t_0} \;= 3ct_{\mathrm{ls}}\left(\left(\frac{t_0}{t_{\mathrm{ls}}}\right)^{1/3} - 1\right)$$

- Maximaler Winkel für kausalen Kontakt ($t_{\mathrm{ls}} \approx 10^{12}$ s, $t_0 \approx 3 \times 10^{17}$ s):

$$\Delta\Phi \;\approx\; \frac{D_{\mathrm{h}}(t_{\mathrm{ls}})}{D_{\mathrm{ls}}(t_{\mathrm{ls}})} \;=\; \frac{2}{3\left(\left(\frac{t_0}{t_{\mathrm{ls}}}\right)^{1/3} - 1\right)} \;\approx\; 0,58^\circ$$



# Horizont-Problem (4)

**Inflationäre Lösung des Horizont-Problems**

- Teilchenhorizont zum Zeitpunkt $t_{\mathrm{ls}}$:

$$D_{\mathrm{h}}(t_{\mathrm{ls}}) \;=\; R(t_{\mathrm{ls}})c\int_0^{t_{\mathrm{ls}}} dt\frac{1}{R(t)}$$

- Steigt $R(t)$ mindestens so stark wie eine Gerade ($\ddot{R} \geq 0$) existiert kein Teilchenhorizont
- Argument ist fragwürdig, da jenseits der Planck-Zeit die ART ihre Gültigkeit verliert (Quantengravitationseffekte)
- Dennoch: Teilchenhorizont wächst in einer inflationären Phase verhältnismäßig schneller als in einer nicht-inflationären Phase
  - $\ddot{R} > 0$: Der Großteil der Ausdehnung findet spät statt; das kleine Universum konnte davor problemlos wechselwirken
  - $\ddot{R} < 0$: Der Großteil der Ausdehnung findet zu Beginn statt; das Universum ist danach zu groß, als dass beliebige Raumpunkte in der verbleibenden Zeit wechselwirken hätten können



# Flachheits-Problem (1)

- Experimentelle Daten: $\Omega_0 \approx 1$
- **Daraus folgt in der Standardkosmologie:** $\Omega_{\mathrm{P}} = 1 \pm 10^{-60}$
- Fine-Tuning-Problem
- Inflation macht $\Omega_0 \approx 1$ natürlich

# Flachheits-Problem (2)

- Friedmannsche Gleichung:

$$\begin{aligned}\dot{R}^2 &= \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 - kc^2 \\ -kc^2 &= H^2R^2\Big(1 - \underbrace{\frac{8\pi G\rho}{3H^2}}_{=\Omega}\Big) = H^2R^2(1-\Omega) \quad (1)\end{aligned}$$

- Strahlungsdominiertes Universum: $\rho R^4 = \text{konstant} \quad (2)$
- Aus der Definition von $\Omega$: $\rho \propto \Omega H^2 \quad (3)$
- (3) in (2):

$$\begin{aligned}\Omega H^2 R^4 &= \text{konstant} \\ H^2R^2 &\propto \frac{1}{\Omega R^2} \quad (4)\end{aligned}$$

- (4) in (1):

$$\begin{aligned}\frac{1-\Omega}{\Omega R^2} &= \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0 R_0^2} \\ \Omega_0 &= \left(1 + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1-\Omega}{\Omega}\right)^{-1}\end{aligned}$$



# Flachheits-Problem (3)

- Entwicklung von der Planck-Zeit ($t_\mathrm{P} \approx 10^{-43}$ s) bis heute ($t_0 \approx 3 \times 10^{17}$ s) für $R(t) \propto t^{1/2}$:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \left(1 + \left(\frac{R_0}{R_\mathrm{P}}\right)^2 \frac{1-\Omega_\mathrm{P}}{\Omega_\mathrm{P}}\right)^{-1} = \\ &= \left(1 + \frac{t_0}{t_\mathrm{P}}\frac{1-\Omega_\mathrm{P}}{\Omega_\mathrm{P}}\right)^{-1} \approx \\ &\approx \left(1 + \frac{3 \times 10^{17}\ \mathrm{s}}{10^{-43}\ \mathrm{s}}\frac{1-\Omega_\mathrm{P}}{\Omega_\mathrm{P}}\right)^{-1} = \\ &= \left(1 + 3 \times 10^{60}\frac{1-\Omega_\mathrm{P}}{\Omega_\mathrm{P}}\right)^{-1}\end{aligned}$$

- Aus $\Omega_0 \approx 1$ folgt $\Omega_\mathrm{P} = 1 \pm 10^{-60}$



# Flachheits-Problem (4)

**Inflationäre Lösung des Flachheits-Problems**

- Friedmannsche Gleichung:

$$\begin{aligned}-kc^2 &= H^2R^2(1-\Omega) \\ |1-\Omega| &= \frac{|k|c^2}{H^2R^2} = \frac{|k|c^2}{\dot{R}^2} \\ \frac{d}{dt}|1-\Omega| &= |k|c^2\frac{-2\dot{R}\ddot{R}}{\dot{R}^4} = -2|k|c^2\frac{\ddot{R}}{\dot{R}^3}\end{aligned}$$

- In einem inflationären, expandierenden Universum wird $\Omega$ exponentiell gegen 1 getrieben
- In einem nicht-inflationären, expandierenden Universum wird $\Omega$ von 1 weggetrieben



# Monopol-Problem

- GUTs (Grand Unified Theories) postulieren magnetische Monopole in großer Zahl
  - Punktartige Fehler im Higgs-Feld (Vortrag „Strings und Domänenwände in der Kosmologie“)
  - $10^{16}$-fache Protonenmasse
  - Entstehung während der GUT-Symmetriebrechung
  - Anzahldichte der Monopole entspricht etwa der Anzahldichte der Baryonen
- **Experimentell wurde noch nie ein magnetischer Monopol nachgewiesen!**

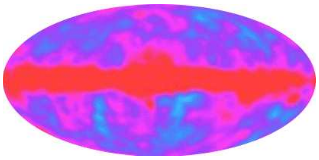
**Inflationäre Lösung des Monopol-Problems**

- Inflationäre Phase nach Erzeugung der Monopole
- Erfolgreiche inflationäre Modelle: Ausdehnung des Universums um einen Faktor von mindestens $e^{60} \approx 10^{26}$
- Das Volumen des Universums vergrößert sich um einen Faktor von mindestens $e^{180} \approx 10^{78}$ während sich die Anzahldichte der Monopole um den gleichen Faktor reduziert

# Struktur-Problem (1)

- In einem massendominierten Universum entwickeln sich vorhandene Dichtefluktuationen zu den heute beobachtbaren Strukturen (Jeans-Theorie)
- Die Hintergrundstrahlung ermöglicht einen Blick auf diese frühen Dichtefluktuationen ($\Delta T/T \approx 10^{-5}$)
- **Woher stammen diese Dichtefluktuationen?**

Temperatur der Hintergrundstrahlung (COBE)



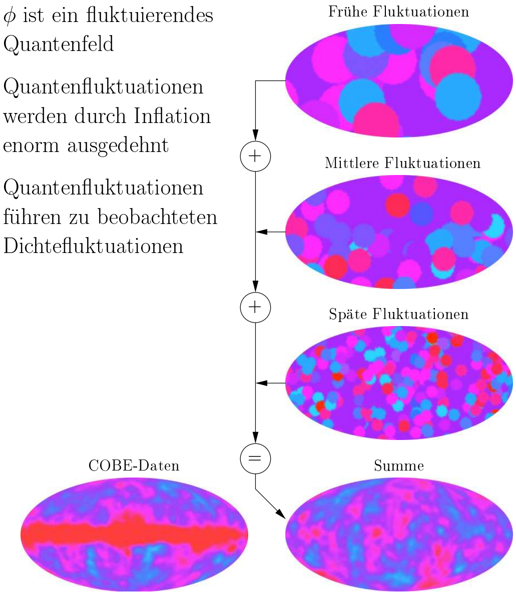




# Struktur-Problem (2)

**Inflationäre Lösung des Struktur-Problems**

- $\phi$ ist ein fluktuierendes Quantenfeld
- Quantenfluktuationen werden durch Inflation enorm ausgedehnt
- Quantenfluktuationen führen zu beobachteten Dichtefluktuationen








# Physik der Inflation (1)

- Ziel: Physikalischer Mechanismus, der über einen begrenzten Zeitraum eine exponentielle Ausdehnung des Universums bewirkt
- Friedmannsche Gleichung mit kosmologischer Konstante:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 - kc^2 + \frac{\Lambda}{3}R^2 = \frac{8\pi G(\rho + \rho_\Lambda)}{3}R^2 - kc^2$$

- Näherung für ein nicht-frühes Universum ($\rho_\Lambda \gg \rho$, $R$ groß):

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}R^2$$

$$\dot{R} = \pm \underbrace{\left(\frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}\right)^{1/2}}_{=H} R$$

$$R(t) = \tilde{R}\exp\left(\pm\left(\frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}\right)^{1/2} t\right) = \tilde{R}e^{\pm Ht}$$

- **Wir brauchen einen Mechanismus, der für begrenzte Zeit eine kosmologische Konstante simuliert**





# Skalarfeld (Energie-Impuls-Tensor)

- Einführen eines Skalarfeldes $\phi(\mathbf{r}, t)$ mit Potential $V(\phi)$
- Lagrange-Dichte (Strahlung und Materie vernachlässigt):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi)$$

- Energie-Impuls-Tensor:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

$$\begin{aligned} T^{00} &= \partial^0\phi\partial^0\phi - g^{00}\mathcal{L} = \\ &= \frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) = \\ &= \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) = \rho_\phi c^2 \\ T^{ii} &= \partial^i\phi\partial^i\phi - g^{ii}\mathcal{L} = \\ &= \frac{1}{3}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) = \\ &= \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) = p \end{aligned}$$

## Skalarfeld (Zustandsgleichungen)

- Energie-Impuls-Tensor:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) &= \rho_\phi c^2 \\ T^{ii} &= \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) &= p \end{aligned}$$

- Zustandsgleichungen für drei Spezialfälle
  - $\dot{\phi}^2$ dominant: $\rho_\phi c^2 = p$
  - $(\nabla\phi)^2$ dominant: $\rho_\phi c^2 = -3p$
  - $V(\phi)$ dominant: $\rho_\phi c^2 = -p$





## $R(t)$ für dominantes $V(\phi)$

- $V(\phi)$ dominant: $\rho_\phi c^2 = -p \quad (1)$
- Adjabatische Expansion des Universums:

$$p\left(\frac{d}{dt}R^3\right) + c^2\left(\frac{d}{dt}(\rho_\phi R^3)\right) = 0 \quad (2)$$

- Einsetzen von (1) in (2):

$$\begin{aligned} -\rho_\phi 3R^2\dot{R} + \dot{\rho}_\phi R^3 + \rho_\phi 3R^2\dot{R} &= \dot{\rho}_\phi R^3 = 0 \\ \dot{\rho}_\phi &= 0 \\ \rho_\phi &= V(\phi \approx \text{konstant})/c^2 = \tilde{V}/c^2 = \text{konstant} \quad (3) \end{aligned}$$

- Friedmannsche Gleichung:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_\phi}{3}R^2 - kc^2 \quad (4)$$

- Einsetzen von (3) in (4) ($R$ groß):

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= \frac{8\pi G\tilde{V}}{3c^2}R^2 \\ R(t) &= \tilde{R}\exp\left(\left(\frac{8\pi G\tilde{V}}{3c^2}\right)^{1/2} t\right) = \tilde{R}e^{Ht} \end{aligned}$$





## $R(t)$ für dominantes $\dot{\phi}^2$ bzw. $(\nabla\phi)^2$

- $\dot{\phi}^2$ dominant: $\rho_\phi c^2 = p$

$$\vdots$$
$$R(t) = \tilde{R}t^{1/3}$$

- $(\nabla\phi)^2$ dominant: $\rho_\phi c^2 = -3p$

$$\vdots$$
$$R(t) = \tilde{R}t$$





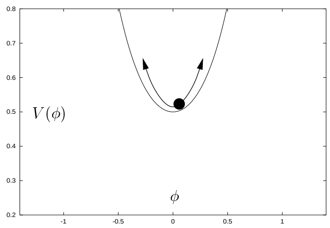
## Physik der Inflation (2)

- Zusammenfassung
  - Lagrange-Dichte (Strahlung und Materie vernachlässigt):
  $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi)$$
  - $\dot{\phi}^2$ dominant: $R(t) = \tilde{R}t^{1/3}$
  - $(\nabla\phi)^2$ dominant: $R(t) = \tilde{R}t$
  - $V(\phi)$ dominant: $R(t) = \tilde{R}e^{Ht}$
- Inflation nur für dominantes $V(\phi)$, das heißt für ein sich langsam bewegendes und räumlich nahezu homogenes Feld
- **Wir brauchen einen Mechanismus, der für begrenzte Zeit $V(\phi)$ zur dominanten Größe macht**

# Präinflationäre Phase

- Keine Inflation im frühen Universum
  - Das frühe Universum ist sehr heiß ($T \propto 1/R$)
    - Schnelle thermische Bewegung des Feldes $\rightarrow \dot{\phi}^2$ groß
    - Starke thermische Fluktuationen $\rightarrow (\nabla\phi)^2$ groß
  - Die dominierende Energieform im frühen Universum ist Strahlung:

    $\rho R^4 \;=\; \text{konstant}$
- Potential ähnelt einem Potentialtopf; das Feld ist darin gefangen



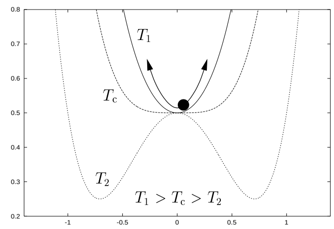

$V(\phi) = V_0 + \phi^2 + \phi^4$





# Beginn der Inflation

- Das sich ausdehnende Universum kühlt sich ab ($T \propto 1/R$)
  - $\dot{\phi}^2$ wird kleiner
  - $(\nabla\phi)^2$ wird kleiner
  - $V(\phi)$ gewinnt immer stärker an Gewicht
- Strahlung verliert im sich ausdehnenden Universum stark an Einfluss
- Manche Modelle: $\phi$ wird zufällig in einem begrenzten räumlichen Gebiet für kurze Zeit konstant
- Bei unterschreiten einer kritischen Temperatur $T_c$ kommt es zu einem Symmetriebruch im Potential $V(\phi)$



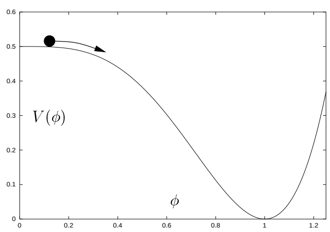

$V(\phi) = V_0 + \alpha(T)\phi^2 + \phi^4$





# Inflationäre Phase (1)

- Das Feld $\phi$ bewegt sich in einem sanft abfallenden Potential




Coleman-Weinberg-Potential: $V(\phi) = 0.5 + \phi^4(\ln(\phi^2) - 0.5)$

**Wie entwickelt sich $\phi$?**

- Gesucht: Die Bewegungsgleichung von $\phi$
- Näherungen
  - $\phi$ ist homogen, das heißt $\phi = \phi(t)$
  - Die Vakuumenergie von $\phi$ ist die dominierende Energie, das heißt $\rho = \rho_\phi$





# Inflationäre Phase (2)

- Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \;=\; \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

- Lagrange-Funktion:

$$L \;=\; \left(\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right)R^3$$

- Lagrange-Gleichung liefert die Bewegungsgleichung des Feldes:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}L \;=\; \frac{\partial}{\partial\phi}L$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}L \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c^2}\dot{\phi}R^3\right) \;=\; \frac{1}{c^2}\ddot{\phi}R^3 + \frac{3}{c^2}\dot{\phi}R^2\dot{R} \;=$$

$$=\; \left(\frac{1}{c^2}\ddot{\phi} + \frac{3H}{c^2}\dot{\phi}\right)R^3$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}L \;=\; -V'(\phi)R^3$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi)c^2 \;=\; 0$$

# Inflationäre Phase (3)

**Bedingungen für eine inflationäre Phase**

- $V(\phi)$ muss in der Lagrange-Dichte

  $$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

  dominant sein:

  $$V(\phi) \gg \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 \quad \text{(B1)}$$

- $\dot{\phi}$ muss klein bleiben, das heißt in der Bewegungsgleichung

  $$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi)c^2 = 0$$

  muss $\ddot{\phi}$ untergehen:

  $$|\ddot{\phi}| \ll |V'(\phi)c^2| \quad \text{(B2)}$$



# Inflationäre Phase (4)

**Bedingungen für eine inflationäre Phase ausgedrückt durch $V$**

- Die Friedmannsche Gleichung vereinfacht sich wegen (B1) zu:

  $$H^2 = \frac{8\pi G\rho_\phi}{3} - \frac{kc^2}{R^2} \approx \frac{8\pi G(\frac{1}{2c^2}\dot{\phi} + V(\phi))}{3c^2} \approx$$
  $$\approx \frac{8\pi G V(\phi)}{3c^2} \quad \text{(G1)}$$

- Die Bewegungsgleichung vereinfacht sich wegen (B2) zu:

  $$3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi)c^2 \quad \text{(G2)}$$

- (G2) und (G1) in (B1):

  $$V(\phi) \gg \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 \approx \frac{1}{2c^2}\frac{V'(\phi)^2c^4}{9H^2} \approx$$
  $$\approx \frac{1}{2c^2}\frac{V'(\phi)^2c^4}{9}\frac{3c^2}{8\pi G V(\phi)} = \frac{V'(\phi)^2c^4}{48\pi G V(\phi)}$$

  $$\left|\frac{V'(\phi)}{V(\phi)}\right| \ll \frac{\sqrt{48\pi G}}{c^2} \quad \text{(B1}'\text{)}$$



# Inflationäre Phase (5)

- Differenzieren von (G2):

  $$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} \approx 3H\ddot{\phi} \approx -V''(\phi)\dot{\phi}c^2 \quad \text{(G2}'\text{)}$$

- (G2′), (G2) und (G1) in (B2):

  $$|V'(\phi)c^2| \gg |\ddot{\phi}| \approx \left|\frac{V''(\phi)\dot{\phi}c^2}{3H}\right| \approx$$
  $$\approx \left|\frac{V''(\phi)c^2}{3H}\frac{V'(\phi)c^2}{3H}\right|$$
  $$\approx \left|\frac{V''(\phi)c^2}{3}\frac{V'(\phi)c^2}{3}\frac{3c^2}{8\pi G V(\phi)}\right| =$$
  $$= \left|\frac{V''(\phi)V'(\phi)c^6}{24\pi G V(\phi)}\right|$$

  $$\left|\frac{V''(\phi)}{V(\phi)}\right| \ll \frac{24\pi G}{c^4} \quad \text{(B2}'\text{)}$$

- Interpretation
  - (B1′): Inflation bei relativ schwach steigendem Potential
  - (B2′): Inflation bei relativ schwach gekrümmtem Potential



# Inflationäre Phase (6)

**Ausdehnung während der inflationären Phase**

- Angabe des Expansionsfaktors in $e$-Foldings (inflationäre Phase von $t_\mathrm{i}$ bis $t_\mathrm{f}$):

  $$\frac{R(t_\mathrm{f})}{R(t_\mathrm{i})} = e^N$$

- Nebenrechnung (Kombination von (G1) und (G2)):

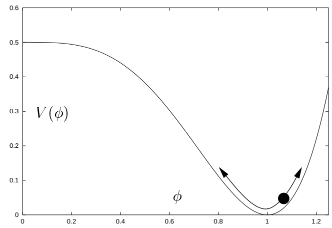
  $$H \approx \frac{8\pi G V(\phi)}{3Hc^2} \approx \frac{8\pi G V(\phi)}{3c^2}\frac{3\dot{\phi}}{-V'(\phi)c^2} =$$
  $$= -\frac{8\pi G V(\phi)}{V'(\phi)c^4}\frac{d\phi}{dt}$$

- Berechnung von $N$:

  $$N = \ln\left(\frac{R(t_\mathrm{f})}{R(t_\mathrm{i})}\right) = [\ln(R(t))]_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} dt\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} =$$
  $$= \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} dt H \approx -\frac{8\pi G}{c^4}\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} dt\frac{V(\phi)}{V'(\phi)}\frac{d\phi}{dt} =$$
  $$= -\frac{8\pi G}{c^4}\int_{\phi_\mathrm{i}}^{\phi_\mathrm{f}} d\phi\frac{V(\phi)}{V'(\phi)}$$

# Ende der Inflation (1)

- Das Feld $\phi$ oszilliert um das neue globale Minimum $\phi_{\text{min}}$ ($V(\phi_{\text{min}}) = 0$)




Coleman-Weinberg-Potential: $V(\phi) = 0.5 + \phi^4(\ln(\phi^2) - 0.5)$

- Dämpfung der Oszillationen durch
  - Ausdehnung des Universums ($3H\dot{\phi}$)
  - Kopplung an andere Felder und damit verbundene Teilchenerzeugung ($\Gamma_\phi \dot{\phi}$)
- Modifizierte Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_\phi \dot{\phi} + V'(\phi)c^2 \ = \ 0$$





# Ende der Inflation (2)

**Erinnerung an „Die Thermodynamik im frühen Universum“**

- Für Strahlung und relativistische Teilchen gilt:

$$\begin{aligned} \rho &\propto T^4 \\ RT &= \text{konstant} \\ S &\propto R^3T^3 = \text{konstant} \end{aligned}$$

**Wiederaufheizen des Universums (Reheating)**

- Kopplung an andere Felder dämpft wesentlich stärker als Ausdehnung des Universums, das heißt $V(0)$ wird fast ausschließlich zur Anregung dieser Felder verwendet
- Zerfall der $\phi$-Partikel in deutlich leichtere, relativistische Teilchen
- Spezialfall: Oszillationen werden schnell gedämpft im Vergleich zur Ausdehnung des Universums:

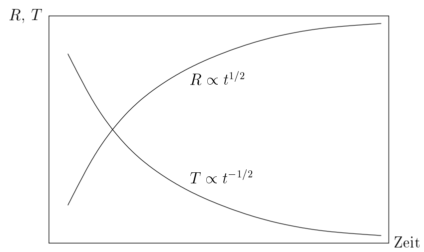
$$\rho c^2 \ \approx \ V(0) \quad \rightarrow \quad T_{\text{rh}} \ \propto \ V(0)^{1/4}$$



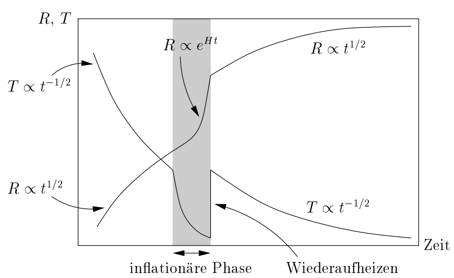


# Ende der Inflation (3)

- $R(t)$ und $T(t)$ in einem Standardmodell




- $R(t)$ und $T(t)$ in einem inflationären Modell








# Ende der Inflation (4)

- Enormer Entropiezuwachs wegen starkem Temperaturanstieg ($S \propto R^3T^3$)

$$\begin{aligned} T(t_{\text{i}}) &= T_{t_{\text{rh}}} \\ \frac{R(t_{\text{f}})}{R(t_{\text{i}})} &= e^{100} \end{aligned}$$

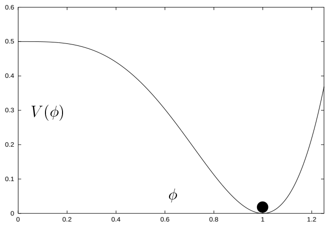
$$\begin{aligned} S(t_{\text{i}}) &= CR(t_{\text{i}})^3T(t_{\text{i}})^3 \\ S(t_{\text{f}}) &= CR(t_{\text{f}})^3T_{\text{rh}}^3 = Ce^{300}R(t_{\text{i}})^3T(t_{\text{i}})^3 \end{aligned}$$

$$S(t_{\text{f}}) \ = \ e^{300}S(t_{\text{i}})$$

- Die Probleme der Standardkosmologie können teilweise auch so formuliert werden, dass zu ihrer Lösung ein Mechanismus erforderlich ist, der die Entropie drastisch vergrößert

# Postinflationäre Phase

- Das Feld ruht im neuen globalen Minimum $\phi_{\text{min}}$ ($V(\phi_{\text{min}}) = 0$), das heißt es hat keinen weiteren Einfluss auf die Entwicklung des Universums




Coleman-Weinberg-Potential: $V(\phi) = 0.5 + \phi^4(\ln(\phi^2) - 0.5)$

- Ab jetzt wieder Standardkosmologie





# Notwendige Eigenschaften (1)

- Physikalischer Mechanismus, der eine inflationäre Phase einleitet und wieder beendet
- Hinreichend starke Expansion
  - Zur Lösung des Horizont-Problems und des Flachheits-Problems muss $R(t_{\text{f}})/R(t_{\text{i}}) \gtrapprox e^{60}$ gelten
  - Im Allgemeinen sehr leicht zu erfüllen
- Mit den Beobachtungen der Hintergrundstrahlung verträgliche Dichtefluktuationen
  - $\Delta\rho/\rho \approx 10^{-5}$
  - Sehr schwierig zu erfüllen
- Ausreichendes Wiederaufheizen
  - Um das beobachtete Übergewicht an leichten Elementen erklären zu können, muss $T_{\text{rh}} \gtrapprox 1$ MeV gelten (schwache Forderung)
  - Manche Teilchenphysik-Modelle erfordern sehr viel höhere Reheat-Temperaturen
  - Hohe Reheat-Temperaturen stehen im Konflikt mit akzeptablen Dichtefluktuationen





# Notwendige Eigenschaften (2)

- Keine unerwünschten Relikte
  - Bekanntester Vertreter: Magnetische Monopole
  - Weitere unerwünschte Relikte können abhängig vom verwendeten Teilchenphysik-Modell auftreten; diese müssen durch die inflationäre Phase beseitigt werden
- Teil eines vernünftigen Teilchenphysik-Modells
  - Das skalare Feld $\phi$ sollte kein eigenständiges Konstrukt sondern Teil einer größeren Theorie sein
  - Äußerst schwierig zu erfüllen (ungelöst?)

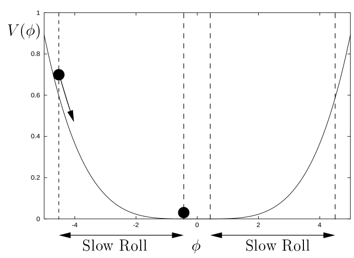




# Chaotic Inflation (1)

- A. D. Linde, Phys. Lett. B129, 177-181, 1983
- Potential:

$$V(\phi) \;=\; \lambda\phi^4$$




- Anfangsbedingungen: Das „chaotisch“ fluktuierende Feld $\phi$ wird für kurze Zeit in einem räumlich begrenzten Bereich $B$ konstant ($\phi(B) = \phi_{\text{i}} \neq 0$)

## Chaotic Inflation (2)

- Slow-Roll-Bedingungen:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \lambda\phi^4 \\ V'(\phi) &= 4\lambda\phi^3 \\ V''(\phi) &= 12\lambda\phi^2 \end{aligned}$$

$$(\mathrm{B1}') \quad \left|\frac{V'(\phi)}{V(\phi)}\right| = \left|\frac{4}{\phi}\right| \ll \frac{\sqrt{48\pi G}}{c^2}$$

$$|\phi| \gg \frac{4c^2}{\sqrt{48\pi G}} \approx \frac{0,33c^2}{\sqrt{G}}$$

$$(\mathrm{B2}') \quad \left|\frac{V''(\phi)}{V(\phi)}\right| = \left|\frac{12}{\phi^2}\right| \ll \frac{24\pi G}{c^4}$$

$$|\phi| \gg \frac{c^2}{\sqrt{2\pi G}} \approx \frac{0,40c^2}{\sqrt{G}}$$





## Chaotic Inflation (3)

- $e$-Foldings des Expansionsfaktors:

$$N = -\frac{8\pi G}{c^4}\int_{\phi_\mathrm{i}}^{\phi_\mathrm{f}} d\phi \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} = -\frac{8\pi G}{c^4}\int_{\phi_\mathrm{i}}^{\phi_\mathrm{f}} d\phi \frac{\phi}{4} =$$

$$= -\frac{2\pi G}{c^4}\left[\frac{1}{2}\phi^2\right]_{\phi_\mathrm{i}}^{\phi_\mathrm{f}} = \frac{\pi G}{c^4}(\phi_\mathrm{i}^2 - \phi_\mathrm{f}^2)$$

- Mindestwert für $|\phi_\mathrm{i}|$ um 60 $e$-Foldings zu erreichen:

$$|\phi_\mathrm{i}| = \left(\frac{Nc^4}{\pi G} + \phi_\mathrm{f}^2\right)^{1/2}$$

$$|\phi_\mathrm{i}| \geq \left(\frac{60c^4}{\pi G} + \frac{c^4}{2\pi G}\right)^{1/2} \approx \frac{4,39c^2}{\sqrt{G}}$$

- Durch geeignete Wahl von $\lambda$ können akzeptable Dichtefluktuationen erreicht werden
- Schwäche dieses Modells: Reheating





## Schlussbemerkungen

- Inflationäre Modelle lösen verschiedene Probleme der Standardkosmologie auf elegante Art und Weise
- Es existieren zahlreiche inflationäre Modelle, jeweils mit verschiedenen Stärken und Schwächen
- *Das inflationäre Modell* wurde noch nicht gefunden
- Gegenstand aktueller Forschung in der Kosmologie





## Literatur


- J. Bernstein. *An Introduction to Cosmology.* Prentice Hall. 1998.
- P. Coles, F. Lucchin. *Cosmology.* Wiley. 2002.
- E. W. Kolb, M. S. Turner. *The Early Universe.* Addison-Wesley. 1990.
- J. A. Peacock. *Cosmological Physics.* Cambridge University Press. 2002.
- D. J. Raine, E. J. Thomas. *An Introduction to the Science of Cosmology.* Institute of Physics Publishing. 2001.
- *http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmo_04.htm.*