

Das Atiyah-Singer-Index-Theorem in SU(2)-Yang-Mills-Theorie

Marc Wagner

mcwagner@theorie3.physik.uni-erlangen.de

<http://theorie3.physik.uni-erlangen.de/~mcwagner>

13. November 2006

Das Atiyah-Singer-Index-Theorem in ...

- Atiyah-Singer-Index-Theorem in SU(2)-Yang-Mills-Theorie (“zweifarbige QCD mit unendlich schweren Quarks”):

$$Q = n_R - n_L \quad (1)$$

(Q : Topologische Ladung der vorliegenden Eichfeldkonfiguration; n_R : Anzahl der rechtshändigen Nullmoden des Dirac-Operators; n_L : Anzahl der linkshändigen Nullmoden des Dirac-Operators).

- M. F. Atiyah and I. M. Singer, “The Index Of Elliptic Operators. 5,” *Annals Math.* **93**, 139 (1971).

Gliederung

- Topologische Ladung.
- Nullmoden des Dirac-Operators.
- Beweis des Atiyah-Singer-Index-Theorems.
- Mögliche Anwendung des Atiyah-Singer-Index-Theorems.
- Anzahl der “Instanton-Nullmoden”.
- Mögliche Anwendungen.
- Zusammenfassung.

Topologische Ladung (1)

Maxwell-Theorie (U(1)-Eichtheorie), “1+1 Raumzeitdimensionen” (1)

- Betrachtet werden ausschließlich Eichfelder ohne Singularitäten, die im Unendlichen, d.h. auf dem Rand der 1+1-dimensionalen Raumzeit, einer Eichtransformation angewendet auf $A_\mu = 0$ entsprechen (\rightarrow “Eichfelder mit endlicher Wirkung”).

- Eichtransformation:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = gA_\mu g^{-1} - i(\partial_\mu g)g^{-1} \quad , \quad g \in U(1). \quad (2)$$

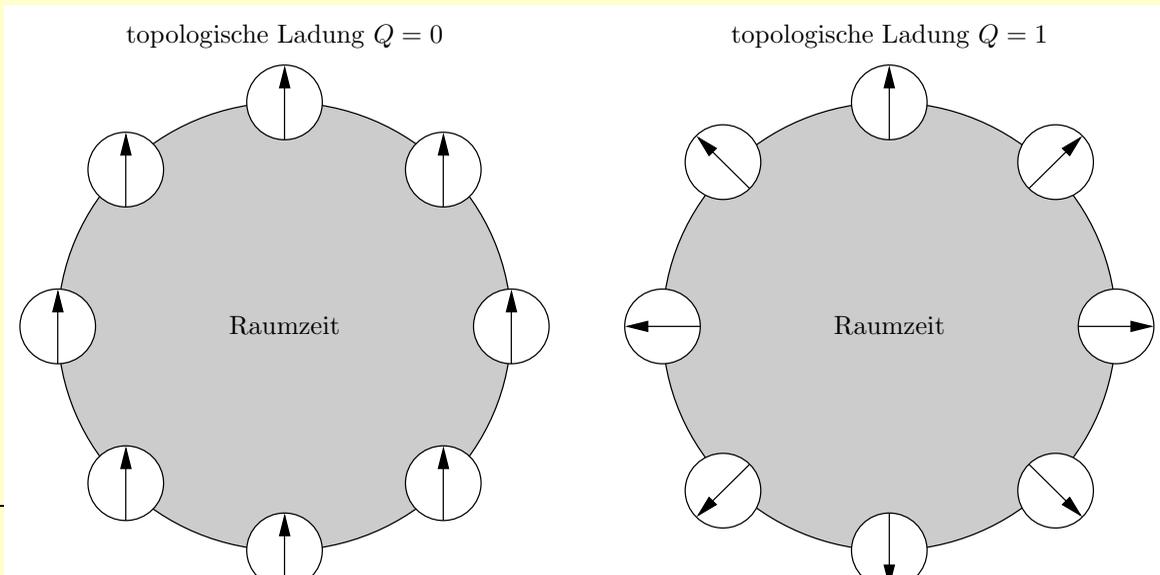
- Eichfelder auf dem Rand der 1+1-dimensionalen Raumzeit:

$$A_\mu = -i(\partial_\mu g)g^{-1} \quad , \quad g \in U(1). \quad (3)$$

Topologische Ladung (2)

Maxwell-Theorie (U(1)-Eichtheorie), “1+1 Raumzeitdimensionen” (2)

- Der Rand der 1+1-dimensionalen Raumzeit entspricht einem Kreis, genau wie die Eichgruppe U(1). Diese müssen gemäß (3) aufeinander abgebildet werden. Ein Umlauf auf dem Rand der Raumzeit entspricht einer ganzzahligen Anzahl von Umläufen Q auf dem Kreis der Eichgruppe. Q wird als topologische Ladung bezeichnet.



Topologische Ladung (3)

SU(2)-Yang-Mills-Theorie, “3+1 Raumzeitdimensionen”

- Der Rand der 3+1-dimensionalen Raumzeit entspricht der S^3 .
- Die Eichgruppe SU(2) kann ebenfalls durch die S^3 parametrisiert werden, d.h. jedes $g \in SU(2)$ kann wie folgt geschrieben werden:

$$g = h_0 + ih_i \sigma_i \quad , \quad h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1. \quad (4)$$

- Jede Eichfeldkonfiguration ohne Singularitäten, die auf dem Rand der 3+1-dimensionalen Raumzeit einer Eichtransformation angewendet auf $A_\mu = 0$ entspricht, besitzt eine ganzzahlige topologische Ladung Q . Diese entspricht der Anzahl der Überdeckungen der S^3 der Eichgruppe bei “einem Umlauf” auf dem Rand der Raumzeit. Es gilt (im Euklidischen)

$$Q = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a \quad , \quad \tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^a \quad ,$$
$$\epsilon_{0123} = -1. \quad (5)$$

Nullmoden des Dirac-Operators

- ψ ist eine Nullmode des (Euklidischen) Dirac-Operators wenn

$$\gamma_\mu D_\mu \psi = 0 \quad , \quad D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu \quad (6)$$

gilt und ψ normierbar ist.

- Chirale Darstellung der γ -Matrizen:

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_\mu \\ +i\bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_\mu = (+i, \vec{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}_\mu = (-i, \vec{\sigma}). \quad (7)$$

- Mit $\psi = (\phi_L, \phi_R)$ vereinfacht sich (6) zu

$$\bar{\sigma}_\mu D_\mu \phi_L = \bar{D}\phi_L = 0 \quad , \quad \sigma_\mu D_\mu \phi_R = D\phi_R = 0. \quad (8)$$

Folglich können die Nullmoden des Dirac-Operators entweder “linkshändig”, d.h. $\psi = (\phi_L, 0)$, oder “rechtshändig”, d.h. $\psi = (0, \phi_R)$, gewählt werden.

Beweis des Atiyah-Singer-Index-... (1)

- S. Vandoren and P. van Nieuwenhuizen, “Lectures on instantons in (super) Yang-Mills theory,” unpublished (2005).
- Es gilt (ker bezeichnet die Anzahl der Nullmoden)

$$\ker(\bar{D}D) = \ker(D) = n_R = \# \text{ rechtshändige Nullmoden} \quad (9)$$

$$\ker(D\bar{D}) = \ker(\bar{D}) = n_L = \# \text{ linkshändige Nullmoden.} \quad (10)$$

- (9) ist richtig wenn $D\phi_R \neq 0$ und $\bar{D}D\phi_R = 0$ nicht gleichzeitig erfüllt sein kann. Die Annahme es wäre so führt zum Widerspruch:

$$\begin{aligned} 0 &\neq (D\phi_R)^\dagger D\phi_R = \phi_R^\dagger \left(\sigma_\mu (\partial_\mu - iA_\mu) \right)^\dagger D\phi_R = \\ &= \phi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu (-\partial_\mu + iA_\mu) D\phi_R = -\phi_R^\dagger \bar{D}D\phi_R = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

- Beweis von (10) analog.

Beweis des Atiyah-Singer-Index-... (2)

- Es folgt

$$n_R - n_L = \ker(\bar{D}D) - \ker(D\bar{D}). \quad (12)$$

- $\bar{D}D$ und $D\bar{D}$ haben das gleiche Spektrum für Nicht-Nullmoden:

$$\bar{D}D\phi = \lambda\phi \rightarrow D\bar{D}(D\phi) = \lambda(D\phi) \quad (13)$$

$$D\bar{D}\tilde{\phi} = \lambda\tilde{\phi} \rightarrow \bar{D}D(\bar{D}\tilde{\phi}) = \lambda(\bar{D}\tilde{\phi}), \quad (14)$$

d.h. Eigenfunktionen zu $\bar{D}D$ und $D\bar{D}$ mit Eigenwert $\lambda \neq 0$ treten paarweise auf, wobei mit D bzw. \bar{D} "hin und her gesprungen" werden kann.

- Damit gilt für beliebige M

$$\begin{aligned} n_R - n_L &= \ker(\bar{D}D) - \ker(D\bar{D}) = \\ &= \text{Tr} \left(\frac{M^2}{-\bar{D}D + M^2} - \frac{M^2}{-D\bar{D} + M^2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Beweis des Atiyah-Singer-Index-... (3)

- Nebenrechnung:

$$(\gamma_\mu D_\mu)^2 = \begin{pmatrix} \not{D}\bar{\not{D}} & 0 \\ 0 & \bar{\not{D}}\not{D} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

- Nebenrechnung:

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

- (15) lässt sich damit umformen:

$$n_R - n_L = \text{Tr} \left(\frac{M^2}{-(\gamma_\mu D_\mu)^2 + M^2} \gamma_5 \right). \quad (18)$$

Beweis des Atiyah-Singer-Index-... (4)

- Das Ausrechnen der Spur in (18) ist in jeder beliebigen Basis möglich. Es bieten sich ebene Wellen an ($\text{Tr}(\dots)$ bezieht sich im Folgenden nur noch auf Spin- und Farbindizes):

$$\begin{aligned} n_R - n_L &= \text{Tr} \left(\int d^4k \langle k | \frac{M^2}{-(\gamma_\mu D_\mu)^2 + M^2} \gamma_5 | k \rangle \right) = \\ &= \text{Tr} \left(\int d^4k \int d^4x \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^2} \frac{M^2}{-(\gamma_\mu D_\mu)^2 + M^2} \gamma_5 \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\int d^4k \int d^4x \frac{M^2}{-(\gamma_\mu (D_\mu + ik_\mu))^2 + M^2} \gamma_5 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Beweis des Atiyah-Singer-Index-... (5)

- Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} -(\gamma_\mu(D_\mu + ik_\mu))^2 &= -\gamma_\mu\gamma_\nu(D_\mu + ik_\mu)(D_\nu + ik_\nu) = \\ &= -\gamma_\mu\gamma_\nu \left(\frac{1}{2}\{D_\mu, D_\nu\} + \frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu] + iD_\mu k_\nu + iD_\nu k_\mu - k_\mu k_\nu \right) = \\ &= -\frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \left(\frac{1}{2}\{D_\mu, D_\nu\} + iD_\mu k_\nu + iD_\nu k_\mu - k_\mu k_\nu \right) - \\ &\quad \gamma_\mu\gamma_\nu \frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu] = \\ &= -D^2 - 2iD_\mu k_\mu + k^2 + \frac{i}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu F_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{20}$$

Beweis des Atiyah-Singer-Index-... (6)

- Fortsetzung von (19):

$$\begin{aligned}
 n_R - n_L &= \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^4} \text{Tr} \\
 &\quad \left(\int d^4 k \int d^4 x \frac{M^2}{k^2 + M^2 - 2iD_\mu k_\mu - D^2 + \frac{i}{2}\gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}} \gamma_5 \right) = \\
 &= \frac{M^4}{(2\pi)^4} \text{Tr} \\
 &\quad \left(\int d^4 \kappa \int d^4 x \frac{1}{\kappa^2 + 1 - \frac{2i}{M} D_\mu \kappa_\mu - \frac{1}{M^2} D^2 + \frac{i}{2M^2} \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}} \gamma_5 \right). \quad (21)
 \end{aligned}$$

Beweis des Atiyah-Singer-Index-... (7)

- Nebenrechnungen:

$$\text{Tr}(\gamma_5) = 0 \quad (22)$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5) = 0 \quad (23)$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5) = -4\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (24)$$

- Fortsetzung von (21), Limes $M \rightarrow \infty$ ($1/(1 + \epsilon) \approx 1 - \epsilon + \epsilon^2$):

$$\begin{aligned} n_R - n_L &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\int d^4\kappa \int d^4x \frac{1}{\kappa^2 + 1} \left(\frac{i}{2(\kappa^2 + 1)} \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu} \right)^2 \gamma_5 \right) = \\ &= -\frac{1}{64\pi^4} \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5) \underbrace{\int d^4\kappa \frac{1}{(\kappa^2 + 1)^3}}_{=\pi^2/2} \text{Tr} \left(\int d^4x F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right) = \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^a = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a = Q. \quad (25) \end{aligned}$$

Mögliche Anwendung des Atiyah-...

- Bestimmen der topologischen Ladung bei Gitterrechnungen:

- Bestimmen der topologischen Ladung über die Gitterversion von

$$Q = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a \quad (26)$$

scheitert auf Grund von UV-Fluktuationen, die das Ergebnis stark verfälschen. Spezielle Techniken (z.B. “Cooling-Techniques”) sind nötig um die “tatsächliche topologische Ladung” zu bestimmen.

- Alternatives Vorgehen: Bestimmen der topologischen Ladung über die Anzahl der Nullmoden des Dirac-Operators (Atiyah-Singer-Index-Theorem).
- C. Gattringer, M. Göckeler, P. E. L. Rakow, S. Schaefer and A. Schäfer, “A comprehensive picture of topological excitations in finite temperature lattice QCD,” Nucl. Phys. B **618**, 205 (2001) [arXiv:hep-lat/0105023].

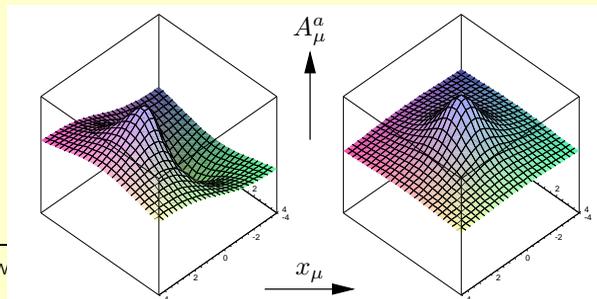
Anzahl der “Instanton-Nullmoden” (1)

Instantone

- Instantone sind Eichfeldkonfigurationen minimaler (Euklidischer) Wirkung mit topologischer Ladung $Q = 1$ (selbstduale Lösungen der Euklidischen Yang-Mills-Bewegungsgleichungen):

$$A_{\mu}^a = \mathcal{C}^{ab} \frac{2\eta_{\mu\nu}^a (x_{\nu} - z_{\nu})}{(x - z)^2 + \lambda^2}, \quad \eta_{\mu\nu}^a = \epsilon_{a\mu\nu} + \delta_{a\mu}\delta_{0\nu} - \delta_{a\nu}\delta_{0\mu}. \quad (27)$$

- Ein Instanton hat acht Parameter: Farborientierung $\mathcal{C}^{ab} \in SO(3)$ (drei Parameter), Position $z_{\mu} \in \mathbb{R}^4$ (vier Parameter), Größe $\lambda \in \mathbb{R}$ (ein Parameter).
- Instantone sind ein “Standardwerkzeug” der nicht-perturbativen QCD.



Anzahl der “Instanton-Nullmoden” (2)

- Ziel: Bestimmen der Anzahl der Nullmoden des Dirac-Operators in Anwesenheit eines Instantons.
- Atiyah-Singer-Index-Theorem: $Q = 1 \rightarrow n_R = n_L + 1$.
- Im Folgenden wird gezeigt, dass keine linkshändigen Nullmoden existieren (Beweis durch Widerspruch).
- Annahme: ϕ_L ist eine Nullmode von \bar{D} .
- Dann gilt offensichtlich

$$D\bar{D}\phi_L = 0. \tag{28}$$

Anzahl der “Instanton-Nullmoden” (3)

- Definition:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu). \quad (29)$$

$\sigma_{\mu\nu}$ ist antisymmetrisch und antiselbstdual, d.h.

$$\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}. \quad (30)$$

- Nebenrechnung:

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu = \delta_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}. \quad (31)$$

Anzahl der “Instanton-Nullmoden” (4)

- $\not{D}\bar{\not{D}}$ kann berechnet werden:

$$\begin{aligned}\not{D}\bar{\not{D}} &= \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu D_\mu D_\nu = (\delta_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}) \left(\frac{1}{2} \{D_\mu, D_\nu\} + \frac{1}{2} [D_\mu, D_\nu] \right) = \\ &= D^2 + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu] = D^2 - \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (32)$$

- Da $\sigma_{\mu\nu}$ antiselbstdual und $F_{\mu\nu}$ selbstdual ist, folgt

$$\not{D}\bar{\not{D}} = D^2.\quad (33)$$

- ϕ_L erfüllt damit

$$D^2 \phi_L = 0.\quad (34)$$

Anzahl der “Instanton-Nullmoden” (5)

- Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_L^\dagger D^2 \phi_L = \phi_L^\dagger (\partial_\mu - iA_\mu) D_\mu \phi_L = \phi_L^\dagger (-\partial_\mu + iA_\mu)^\dagger D_\mu \phi_L = \\ &= -\phi_L^\dagger D_\mu^\dagger D_\mu \phi_L = -|D_\mu \phi_L|^2 \end{aligned} \quad (35)$$

und daraus

$$D_\mu \phi_L = 0. \quad (36)$$

Anzahl der “Instanton-Nullmoden” (6)

- Nebenrechnungen:

$$\eta_{\mu\nu}^a \eta_{\mu\nu}^b = 4\delta^{ab} \quad (37)$$

$$\epsilon^{abc} \eta_{\mu\nu}^b \eta_{\alpha\beta}^c = \delta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta}^a + \delta_{\nu\beta} \eta_{\mu\alpha}^a - \delta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}^a - \delta_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta}^a. \quad (38)$$

- Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= 2\eta_{\nu\alpha}^a \partial_\mu \frac{x_\alpha}{x^2 + \lambda^2} - 2\eta_{\mu\alpha}^a \partial_\nu \frac{x_\alpha}{x^2 + \lambda^2} + 4\epsilon^{abc} \eta_{\mu\alpha}^b \eta_{\nu\beta}^c \frac{x_\alpha x_\beta}{(x^2 + \lambda^2)^2} = \\ &= \dots = -4\eta_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^2}{(x^2 + \lambda^2)^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Anzahl der “Instanton-Nullmoden” (7)

- Aus (36) folgt

$$0 = i[D_\mu, D_\nu]\phi_L = F_{\mu\nu}\phi_L \quad (40)$$

und daraus

$$0 = \eta_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}\phi_L = \eta_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b \frac{\sigma^b}{2}\phi_L \propto \eta_{\mu\nu}^a \eta_{\mu\nu}^b \frac{\sigma^b}{2}\phi_L = 2\sigma^a\phi_L \quad (41)$$

und daraus

$$\phi_L = 0. \quad (42)$$

Dies ist im Widerspruch zur Annahme dass ϕ_L eine Nullmode ist. Folglich besitzt der Dirac-Operator in Anwesenheit eines Instantons keine linkshändigen Nullmoden.

- Aus dem Atiyah-Singer-Index-Theorem folgt dass der Dirac-Operator in Anwesenheit eines Instantons eine rechtshändige Nullmode besitzt.

Mögliche Anwendungen

- Diplomarbeit von Christian Szasz (“Chirale Symmetrie im Pseudoteilchen-Formalismus”):
 - Ziel: Numerische Berechnung der Nullmoden des Dirac-Operators für vorgegebene Pseudoteilchen-Eichfeldkonfigurationen.
 - Test des Programms an Hand eines einzelnen Instantons.
- Lässt sich die Instanton-Lösung verallgemeinern, d.h. kann man eine selbstduale Eichfeldkonfiguration mit topologischer Ladung $Q = 1$ finden, die mehr als acht Parameter besitzt?
 - Man kann zeigen: Ein Instanton hat doppelt so viele Parameter wie der Dirac-Operator Nullmoden in adjungierter Darstellung.
 - Vier Nullmoden in adjungierter Darstellung
 - Instanton-Lösung hat acht Parameter
 - Instanton-Lösung (27) ist die allgemeinste mögliche.

Zusammenfassung

- Atiyah-Singer-Index-Theorem in SU(2)-Yang-Mills-Theorie:

$$Q = n_R - n_L \quad (43)$$

(Q : Topologische Ladung der vorliegenden Eichfeldkonfiguration; n_R : Anzahl der rechtshändigen Nullmoden des Dirac-Operators; n_L : Anzahl der linkshändigen Nullmoden des Dirac-Operators).