

Rekonstruktion glatter Oberflächen mit getrimmten B-Spline-Flächen

Diplomarbeit im Fach Informatik

vorgelegt von

Marc Axel Johannes Wagner

geb. am 17. September 1975 in Nürnberg

angefertigt am

Institut für Informatik 9
Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Betreuer: Kai Hormann

Beginn der Arbeit: 15. März 2002

Abgabe der Arbeit: 4. September 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Reverse Engineering	1
1.2	Zielsetzung dieser Arbeit	2
1.3	Aufbau dieser Arbeit	4
1.4	Bisherige Arbeiten	4
1.4.1	Arbeiten zur Realisierung C^0 -stetiger Übergänge	4
1.4.2	Arbeiten zur Realisierung C^1 -stetiger oder C^2 -stetiger Übergänge	6
1.5	Notation	7
1.6	Polynomflächen	8
1.6.1	TP- <i>Bezier</i> -Flächen	8
1.6.2	<i>Bezier</i> -Dreiecke	8
1.6.3	TP-B-Spline-Flächen	9
1.6.4	Konvertieren einer beliebigen Polynomfläche in TP-B-Spline-Darstellung	9
1.6.5	Kompositionen von Polynomflächen	10
2	Vorbereitende Schritte	13
2.1	Segmentieren des gegebenen Dreiecksnetzes	13
2.2	Parametrisieren der einzelnen Segmente	15
2.3	Approximieren der einzelnen Segmente	16
3	C^0-stetige Übergänge zwischen Primärflächen	21
3.1	Grundprinzip des Verfahrens	21
3.2	Forderungen an die B-Spline-Flächen	24
3.3	<i>Taylor</i> -Entwicklungen einer Schnittkurve	25

3.3.1	Nullte Ableitungen	25
3.3.2	Erste Ableitungen	26
3.3.3	Höhere Ableitungen	27
3.3.4	Beispiel: <i>Taylor</i> -Entwicklung der Schnittkurve eines Paraboloids und einer Ebene	30
3.4	Berechnen einzelner Punkte auf den Schnittkurven	31
3.4.1	Aufstellen nicht-linearer Gleichungssysteme	32
3.4.2	Lösen der nicht-linearen Gleichungssysteme	34
3.4.3	Beispiel: Berechnen eines inneren Punktes und eines Randpunktes einer Schnittkurve	39
3.5	Approximieren der Schnittkurven durch stückweise Polynome	40
3.5.1	Berechnen von Punktesfolgen auf den Schnittkurven	40
3.5.2	Interpolieren der Punktesfolgen durch stückweise Polynome	41
3.5.3	Bewerten der berechneten Schnittkurven	44
3.5.4	Konvergenzbetrachtungen	45
3.6	Erzeugen einer C^0 -stetigen Gesamtfläche	50
3.6.1	Berechnen von Trimming-Kurven mit vorgegebenen Endpunkten	51
3.6.2	Schrittweises Verfeinern der berechneten Trimming-Kurven	53
3.6.3	Rand-Trimming-Kurven bei nicht-geschlossenen Oberflächen	54
3.7	Ergebnisse	54
3.8	Ausblick	57
4	C^2-stetige Übergänge zwischen Primärflächen	59
4.1	Grundprinzip des Verfahrens	59
4.1.1	C^2 -stetiges Überblenden zweier B-Spline-Flächen	60
4.1.2	C^2 -stetige Rekonstruktion geschlossener Flächen	62
4.2	Notwendige Bedingungen für eine C^2 -stetige Gesamtfläche	66
4.2.1	Isoliertes Betrachten der Teilflächen	67
4.2.2	Übergänge zwischen zwei Teilflächen	68
4.2.3	Punkte an denen drei oder mehr Teilflächen zusammenstoßen	76
4.3	Konstruktion der Blending-Funktionen	76
4.3.1	Konstruktion der Blending-Funktionen der Blending-Streifen	77

4.3.2	Konstruktion der Blending-Funktionen der N -flächigen Blends	79
4.4	Konstruktion der Parametertransformationen	86
4.4.1	Die Hilfstransformation \mathbf{T}	86
4.4.2	Abbilden der Parametergebiete der N -flächigen Blends in die Parametergebiete der B-Spline-Flächen	88
4.4.3	Abbilden der Parametergebiete der Blending-Streifen in die Parametergebiete der B-Spline-Flächen	96
4.5	Zusammenfassung	100
4.6	Rekonstruktionsstrategien und Ergebnisse	103
4.6.1	Segmentierung	103
4.6.2	Festlegen der Blending-Bereiche durch d_{innen} und $d_{\text{außen}}$	104
4.6.3	Löschen von Segment-Randpunkten	106
4.6.4	Korrektur der Parameterwerte der Segment-Randpunkte	106
4.7	Ausblick	108
5	Zusammenfassung	111
	Literaturverzeichnis	113

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Reverse Engineering

Im Gegensatz zum normalen **Engineering**, bei dem aus einem vorhandenen Computermodell ein real existierender Gegenstand gefertigt wird, versucht man beim **Reverse-Engineering** aus einem bereits existierenden Gegenstand ein Computermodell zu erzeugen.

Reverse-Engineering ist ein Prozess, der in vielen Bereichen der Industrie, der Technik und der Medizin Anwendung findet. Einige Beispiele dafür werden im Folgenden genannt:

- Ein bereits existierendes Bauteil, von dem kein Computermodell existiert, soll mit Hilfe eines CAD-Systems verbessert werden.
- In vielen Bereichen der Industrie, zum Beispiel der Automobilindustrie, bevorzugen Designer reale, maßstabsgetreue Modelle aus beispielsweise Knetmasse gegenüber virtuellen, dreidimensionalen CAD-Modellen. Diese müssen dann in eine für den Computer verständliche Beschreibung umgewandelt werden.
- In der Medizin ist es häufig notwendig, Prothesen an die Form der entsprechenden Körperteile der Patienten anzupassen. Computermodelle dieser Körperteile und der Einsatz von CAD-Software erleichtern diese Aufgabe gewaltig.
- Will man Abnutzungserscheinungen an einem gebrauchten Bauteil ermitteln, ist es häufig vorteilhaft, ein Computermodell dieses abgenutzten Bauteils zu erzeugen. Dieses Modell kann dann effizient und präzise mit dem Originalmodell verglichen werden.

Der Prozess des Reverse-Engineering lässt sich in drei wesentliche Schritte aufteilen. Diese Gliederung ist an die Übersichtsarbeit [VaMa97] zum Thema Reverse-Engineering angelehnt.

Datengewinnung: Der Gegenstand, von dem ein Computermodell erzeugt werden soll, wird mit einem Scanner abgetastet und vermessen. In der Regel erhält man dadurch eine Vielzahl von Punkten auf der Oberfläche dieses Gegenstandes. Es gibt zahlreiche, teilweise

grundlegend verschiedene Messtechniken, auf die in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen wird. Informationen zu diesem Thema sind in [VaMa97] zu finden.

Segmentierung und Approximation: Die gewonnenen Punkte werden in sinnvolle Teilmengen zerlegt. Diese Teilmengen werden dann jeweils durch eine glatte (in der Regel C^2 -stetige) Fläche approximiert. In den meisten Fällen wird die gewonnene Punktmenge zuerst trianguliert. Dies erleichtert die nachfolgende Segmentierung in sinnvolle Teilmengen und die für die Approximation notwendige Parametrisierung der einzelnen Segmente. Zum Thema Triangulierung von Punktemengen sei auf [Wagn01] verwiesen. Auf Segmentierung und Approximation wird kurz in Kapitel 2 eingegangen. Detaillierte Informationen zur Approximation sind in [Horm01] zu finden.

Erzeugung des CAD-Modells: Die im letzten Schritt erzeugten Approximationen der einzelnen Segmente werden nun zu einer Gesamtfläche zusammengefügt. In der Regel bestehen Lücken oder überstehende Ränder in den Bereichen, in denen die approximierenden Flächen, in der Literatur häufig als **Primärflächen** bezeichnet, zusammenstoßen. Um exakte (C^0 -stetige) Übergänge zu erzielen, müssen diese Primärflächen geeignet erweitert beziehungsweise getrimmt werden. Möchte man scharfe Kanten vollständig vermeiden müssen sogenannte **Sekundärflächen** oder **Blending-Flächen** erzeugt werden, die weiche (mindestens C^1 -stetige, besser noch C^2 -stetige) Übergänge zwischen den in der Regel getrimmten Primärflächen bilden. **Dieser letzte Schritt, die Erzeugung eines CAD-Modells aus einer Reihe von approximierenden Oberflächen, ist das Thema dieser Diplomarbeit.**

Abbildung 1.1 zeigt den Prozess des Reverse-Engineering an dem einfachen Beispiel eines Tetraeders.

1.2 Zielsetzung dieser Arbeit

Die Zielsetzung dieser Arbeit bestand darin, Methoden zu entwickeln, die aus einem gegebenen Dreiecksnetz eine glatte C^2 -stetige Oberfläche erzeugen. Einige wenige C^0 -stetige Übergänge, die im Dreiecksnetz vorhandenen scharfen Kanten entsprechen, müssen auf Wunsch des Benutzers in die Gesamtfläche integriert werden können.

Um die erzeugte Oberfläche mit Standard-CAD-Software weiterverarbeiten zu können, muss diese in B-Spline-Form darstellbar sein (die Standardbeschreibung von Freiformflächen in kommerziellen CAD-Systemen sind TP-*Bezier*-Flächen oder TP-B-Spline-Flächen; siehe [Grei00]). Bei allen verwendeten Teilflächen muss es sich also um eventuell von Polynomkurven getrimmte bivariate Polynome handeln.

Diese Arbeit stellt die logische Fortsetzung von [Horm01] dar und wurde auch als solche geplant. Dazu passend werden im Folgenden die beiden abschließenden Sätze von [Horm01] zitiert:

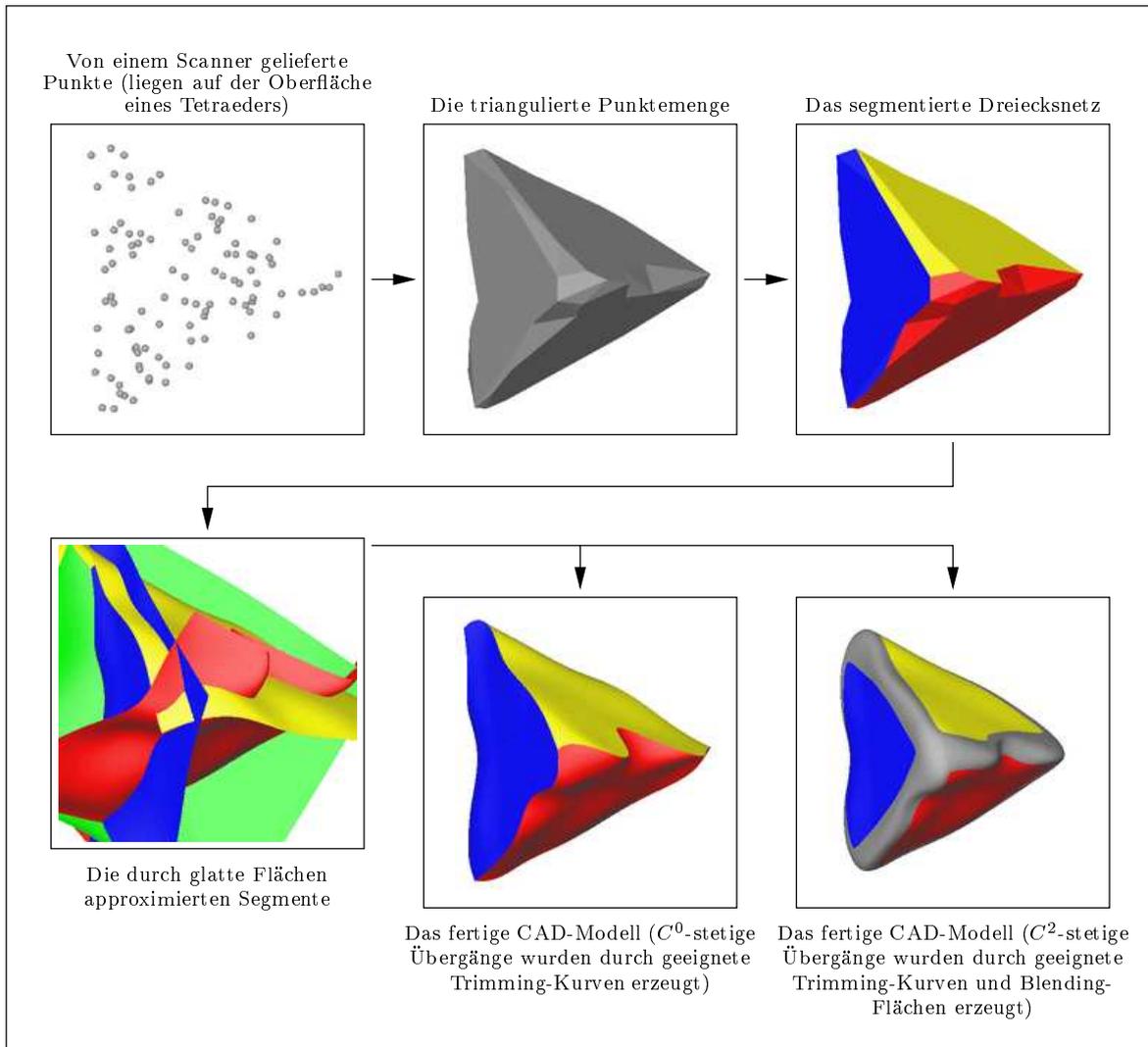


Abbildung 1.1: Reverse-Engineering eines Tetraeders

„Especially in the context of smooth surface fitting, segmentation of the given data leads to the further question of how to join the single surface patches that approximate the individual subsets of data to give an overall reconstruction surface. While a non-differentiable joint along a crest line might be realized by trimming two neighbouring surface patches along the common intersection curve, blending with a higher order of continuity remains an open and unsolved problem“.

Das Hauptaugenmerk richtet sich daher auf die Realisierung von C^0 -stetigen beziehungsweise C^2 -stetigen Übergängen zwischen Primärflächen, die ein gegebenes Dreiecksnetz approximieren.

1.3 Aufbau dieser Arbeit

Dieses einführende Kapitel enthält eine Zusammenstellung bereits existierender Literatur zu dem in dieser Arbeit behandelten Thema, gefolgt von einem kurzen Abschnitt über die verwendete Notation. Am Ende dieser Einleitung werden verschiedene gängige Darstellungen von Polynomflächen und deren Zusammenhänge betrachtet.

Da es sich bei der automatischen Segmentierung von Dreiecksnetzen um ein schwieriges, noch nicht befriedigend gelöstes Problem der Computergraphik handelt, wurde für diesen Teilschritt ein interaktives Tool entwickelt. Zur Parametrisierung und Approximation der einzelnen Segmente mit C^2 -stetigen Polynomflächen wurde weitestgehend auf die Arbeiten [LePe02] und [Horm01] zurückgegriffen. Diese vorbereitenden Schritte, Segmentierung, Parametrisierung und Approximation, werden in Kapitel 2 behandelt.

Wie bereits im letzten Abschnitt erwähnt, bestand eines der Ziele dieser Arbeit in der Realisierung C^0 -stetiger Übergänge zwischen approximierenden Polynomflächen. In Kapitel 3 wird ein numerisches Verfahren präsentiert, mit dessen Hilfe eine beliebig genaue Approximation der Schnittkurven zweier Primärflächen in deren Parametergebieten berechnet werden kann. Verwendet man diese Schnittkurven als Trimming-Kurven, erhält man C^0 -stetige Übergänge zwischen diesen Primärflächen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein völlig neuartiges Verfahren entwickelt, mit dem die Berechnung einer C^2 -stetigen Oberfläche aus den vorher erzeugten, das Dreiecksnetz approximierenden Flächen möglich ist. Dabei handelt es sich nicht um eine numerische Berechnung, sondern um eine exakte Konstruktion einer geschlossenen C^2 -stetigen Oberfläche (das heißt die Teilflächen und deren erste und zweite Ableitungen stoßen wasserdicht aneinander). Dieses Verfahren wird ausführlich in Kapitel 4 vorgestellt.

Abschließend werden in Kapitel 5 die wesentlichen Forschungsergebnisse dieser Diplomarbeit noch einmal knapp zusammengefasst.

1.4 Bisherige Arbeiten

Obwohl auf dem Gebiet des Reverse-Engineering bereits eine Vielzahl von Arbeiten veröffentlicht wurde, sind bei weitem noch nicht alle damit verbundenen Probleme befriedigend gelöst. Es handelt sich daher um ein brisantes Thema gegenwärtiger Forschungsaktivitäten. Im Folgenden wird kurz auf die Ergebnisse einiger bisheriger Arbeiten und die im Zusammenhang damit noch immer bestehenden Probleme eingegangen.

1.4.1 Arbeiten zur Realisierung C^0 -stetiger Übergänge

C^0 -stetige Übergänge zwischen zwei Primärflächen werden fast immer durch Berechnung geeigneter Trimming-Kurven für diese Flächen realisiert. Diese Trimming-Kurven entsprechen den Schnittkurven dieser Primärflächen in deren Parametergebieten.

Zahlreiche existierende Arbeiten beschäftigen sich mit der Berechnung oder Approximation der Schnittkurven zweier Flächen. Eine mögliche Klassifizierung der darin präsentierten Verfahren wird von [KrMa97] vorgenommen.

Subdivision Methods: Das ursprüngliche Problem wird schrittweise in immer kleinere und einfachere Probleme zerlegt (Berechnung der Schnittkurven zwischen immer kleineren Teilflächen), bis ein Abbruchkriterium erreicht wird. Die Einzelprobleme werden meist näherungsweise gelöst und die dabei gewonnenen Teil-Schnittkurven zu den Schnittkurven der ursprünglich betrachteten Flächen zusammengefügt. Derartige Ansätze ähneln den in der Algorithmik häufig vorkommenden *Divide-And-Conquer*-Verfahren. Der Nachteil dieser Methoden liegt im enormen Rechenaufwand, der bei genauer Bestimmung der Schnittkurven durch die vielen notwendigen Unterteilungsschritte anfällt. Beispiele für Arbeiten aus diesem Bereich sind [AzBa90] und [Figu96].

Lattice Evaluation Methods: Diese Methoden werten die betreffenden Flächen in regelmäßigen Abständen aus. Die so gewonnenen Punkte werden zu einfach zu handhabenden Strukturen zusammengefasst (zum Beispiel Strecken oder Dreiecke). Damit wird die Schwierigkeit des zu lösenden Problems reduziert, da nur noch Schnitte zwischen Kurven, Geraden und Ebenen zu bestimmen sind. Da die von diesen Methoden erzielte Genauigkeit stark von der Dichte der berechneten Punkte abhängt, sind auch diese Verfahren bei kleinen Fehlertoleranzen sehr langsam.

Analytic Methods: Analytische Methoden liefern zwar exakte Ergebnisse, sind aber auf Schnitte zwischen Polynomflächen niedrigen Grades beschränkt. Für den allgemeinen Fall der Schnittkurven-Berechnung scheiden diese Verfahren daher aus.

Marching Methods: Die Schnittkurve wird ausgehend von einem bekannten Kurvenpunkt schrittweise in beide Richtungen verfolgt. Dazu wird die lokale Geometrie der Fläche verwendet (häufig wird die Tangente der Schnittkurve aus den Normalen der Tangentialebenen der beiden Flächen berechnet). Aus einer durch einen Schritt gewonnenen Näherung wird mit Hilfe numerischer Verfahren ein weiterer auf der Schnittkurve liegender Punkt ermittelt. Bei dieser Technik handelt es sich sicherlich um die am weitesten verbreitete. Dies liegt vermutlich daran, dass Algorithmen dieser Klasse meistens universell verwendbar, einfach zu implementieren und relativ effizient sind. Beispiele für Arbeiten aus diesem Bereich sind [AbYe96], [AbYe97], [AzBa90], [BaFa87], [Muel90], [HuMa97], [KrMa97] und [Wang96].

Da auch das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren auf schrittweisem Verfolgen der Schnittkurve beruht, werden kurz die drei Hauptprobleme der als *Marching Methods* bezeichneten Methoden genannt (diese Zusammenstellung entstammt ebenfalls [KrMa97]):

Problem 1: Das numerische Verfahren (meistens eine Art *Newton*-Verfahren), mit dem aus einer Näherung ein auf der Schnittkurve liegender Punkt berechnet wird, konvergiert nicht.

Problem 2: Beim Verfolgen der Schnittkurve wird in eine andere Schnittkurve derselben Flächen gesprungen (zwei Flächen können selbstverständlich mehrere Schnittkurven besitzen).

Problem 3: Probleme bei der Behandlung von Singularitäten (es liegt kein echter Schnitt vor, sondern nur eine Berührung) und Punkten, an denen sich mehrere Schnittkurven treffen.

Problem 1 wird in Unterabschnitt 3.4.2 ausführlich behandelt.

Problem 2 ist für die hier vorliegende Aufgabenstellung nur von geringem Interesse, da Start- und Zielpunkt beim Verfolgen einer Schnittkurve bereits zu Beginn bekannt sind. Verläuft sich das Verfahren in einer anderen Schnittkurve, wird der Zielpunkt entweder nicht erreicht oder es wird eine entsprechend große Ungenauigkeit bei der Berechnung der Trimming-Kurven registriert.

Bei **Problem 3** handelt es sich um selten auftretende Spezialfälle, auf die in dieser Arbeit kaum eingegangen wird. Diese Spezialfälle werden durch die in Abschnitt 3.2 geforderten Voraussetzungen ausgeschlossen.

1.4.2 Arbeiten zur Realisierung C^1 -stetiger oder C^2 -stetiger Übergänge

Verfahren zur Erzeugung glatter Übergänge zwischen Primärflächen lassen sich grob in zwei Klassen einteilen.

Eine dieser beiden Klassen besteht aus Methoden, die das erzeugte Dreiecksnetz in sehr viele kleine, wenige Punkte ($\lesssim 10$ Punkte) enthaltende Segmente zerteilen. Bei der Wahl der Segmente wird darauf geachtet, dass ihre Formen grob den Parametergebieten der sie approximierenden Flächen ähneln (dreieckige Form bei *Bezier*-Dreiecken, rechteckige Form bei TP-Flächen). Die diese Segmente approximierenden Flächen werden so berechnet, dass sie exakt mit ihren Nachbarn zusammenstoßen und gewisse Stetigkeitsbedingungen an diesen Übergängen vorliegen. Ein Trimmen dieser Flächen ist also unnötig. Auf Blending-Flächen kann vollständig verzichtet werden. Der Nachteil dieser Methoden liegt in der großen Anzahl der für ein Modell benötigten Teilflächen. Die meisten Arbeiten aus dieser Klasse erzielen nur C^1 -stetige Übergänge, beispielsweise [EcHo96], [Loop94], [WaMe96]. Eine Ausnahme bildet [Pete01]. In dieser Arbeit werden C^2 -stetige Gesamtflächen erzeugt. Allerdings wird neben den vielen verwendeten Primärflächen eine noch größere Anzahl von Blending-Flächen benötigt.

Die andere der beiden Klassen besteht aus Methoden, bei denen das erzeugte Dreiecksnetz in wenige große, zahlreiche Punkte ($\gtrsim 100$ Punkte) enthaltende Segmente zerlegt wird. Diese Segmente werden jeweils durch eine Fläche mit vielen Freiheitsgraden approximiert. Häufig werden dafür TP-B-Spline-Flächen verwendet. Diese Flächen werden in der Nähe der Segmentränder getrimmt und mit geeigneten Blending-Flächen verbunden. Die momentan existierenden, in diese Klasse einzuordnenden Arbeiten beschäftigen sich nur mit der Erzeugung C^1 -stetiger Gesamtflächen. Die Übergänge zwischen den einzelnen Teilflächen werden nur nu-

merisch bis zu einer vom Benutzer vorzugebenden Toleranzgrenze berechnet. Beispiele für derartige Arbeiten sind [FaSv96], [HeKo96], [KoMa00], [VaBe98], [VaHo98], [VaRo97] und [WeRe99].

Das im Rahmen dieser Diplomarbeit entwickelte und in Kapitel 4 präsentierte Verfahren ist in letztere der beiden Klassen einzuordnen. Im Gegensatz zu den meisten bisherigen Methoden, die nur C^1 -stetige Übergänge mit numerischer Genauigkeit erzielen, werden von diesem Verfahren C^2 -stetige Gesamtflächen erzeugt, deren Teilflächen und deren erste und zweite Ableitungen exakt aneinander stoßen.

1.5 Notation

Bei der Benennung von vor allem in Formeln auftretenden Größen und Operationen wurde eine einheitliche Konvention befolgt. Um Missverständnissen vorzubeugen, werden Teile dieser Konvention im Folgenden kurz erläutert.

Die Komponenten eines Vektors oder einer vektorwertigen Funktion \mathbf{F} werden mit F_i bezeichnet. Es gilt also $(\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbf{F} \equiv (F_1, \dots, F_n))$.

Die partiellen Ableitungen einer Funktion $\mathbf{F}(u, v)$ nach u beziehungsweise v werden durch entsprechend häufiges Tiefstellen von u beziehungsweise v abgekürzt. Dementsprechend gilt $\mathbf{F}_u \equiv \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{F}$, $\mathbf{F}_v \equiv \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{F}$, $\mathbf{F}_{uu} \equiv \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbf{F}$, $\mathbf{F}_{uv} \equiv \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{F}$, \dots .

Um eine kompakte Darstellung des Funktionswertes einer Funktion $\mathbf{F}(u, v)$ an der Stelle (u_i, v_i) zu besitzen, wird die Schreibweise $\mathbf{F}_i \equiv \mathbf{F}(u_i, v_i)$ verwendet.

Die letzten drei Regeln finden in der hier genannten Reihenfolge Anwendung. Ein diese Regeln verdeutlichendes Beispiel ist $F_{2,u,1}$. $F_{2,u,1}$ bezeichnet die zweite Komponente des Vektors $\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{F}(u, v)|_{(u,v)=(u_1,v_1)}$.

Die erste totale Ableitung einer Funktion $\mathbf{C}(t)$ nach t wird durch $\dot{\mathbf{C}}$, die zweite totale Ableitung durch $\ddot{\mathbf{C}}$ abgekürzt.

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren oder vektorwertiger Funktionen \mathbf{F} und \mathbf{G} existieren zwei äquivalente Schreibweisen. In kurzen Ausdrücken wird meist die kompakte Darstellung $\mathbf{F} \mathbf{G}$ verwendet, in umfangreicheren Termen die übersichtlichere, aber längere Darstellung $\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle$ bevorzugt.

Die *Euklidische* Norm des Vektors oder der vektorwertigen Funktion \mathbf{F} wird mit $\|\mathbf{F}\|$ bezeichnet, die L_1 -Norm mit $\|\mathbf{F}\|_1$.

Folgen von Punkten (Mengen von Punkten bei denen die Reihenfolge wichtig ist) werden in eckige Klammern geschrieben, beispielsweise $[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_N]$. Eine äquivalente Schreibweise bildet $[\mathbf{p}_i]_{i=0, \dots, N}$.

Der Definitionsbereich oder das Parametergebiet einer als $\mathbf{F}(u, v)$ eingeführten Funktion wird mit $D^{(u,v)}$ bezeichnet. Diese Indizierung durch die verwendeten Variablen ist mathematisch

gesehen nicht ganz korrekt, da es sich bei $\mathbf{F}(\tilde{u}, \tilde{v})$ um die gleiche Funktion handelt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit ist diese Notation jedoch sehr praktisch, da ein Definitionsbereich mehreren Funktionen mit denselben Variablen zugeordnet ist.

Wie in den meisten Arbeiten üblich, steht $\delta_{i,j}$ für das *Kronecker*-Symbol oder den Deltatensor.

1.6 Polynomflächen

In dieser Arbeit werden verschiedene gängige Darstellungen von Polynomflächen verwendet, darunter *TP-Bezier*-Flächen, *Bezier*-Dreiecke und *TP-B-Spline*-Flächen. Ein grundlegendes Verständnis dieser Darstellungen wird vorausgesetzt und kann, falls nicht vorhanden, durch Studium von beispielsweise [Fari96] gewonnen werden. Die folgenden drei Unterabschnitte dienen lediglich dazu, den Leser mit den verwendeten Schreibweisen vertraut zu machen.

1.6.1 TP-Bezier-Flächen

Eine *TP-Bezier*-Fläche $\mathbf{F}(u, v)$ vom Grad (m, n) über dem rechteckigen Parametergebiet $D^{(u,v)} = [t_{u,0}, t_{u,1}] \times [t_{v,0}, t_{v,1}]$ hat die Form

$$\mathbf{F}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^{m, [t_{u,0}, t_{u,1}]}(u) B_j^{n, [t_{v,0}, t_{v,1}]}(v) \mathbf{b}_{i,j} \quad ,$$

wobei die $B_\alpha^{\beta, [t_0, t_1]}$ die *Bernstein*-Polynome über dem Intervall $[t_0, t_1]$ und die $\mathbf{b}_{i,j}$ die Kontrollpunkte sind. Für die *Bernstein*-Polynome gilt

$$B_\alpha^{\beta, [t_0, t_1]}(t) = \binom{\beta}{\alpha} \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right)^\alpha \left(1 - \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right)^{\beta - \alpha} \quad .$$

1.6.2 Bezier-Dreiecke

Ein *Bezier*-Dreieck $\mathbf{F}(u, v)$ vom Grad m über dem dreieckigen Parametergebiet $D^{(u,v)} = \Delta(\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T})$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^2$, hat die Form

$$\mathbf{F}(u, v) = \sum_{i+j+k=m} B_{i,j,k}^m(u, v) \mathbf{b}_{i,j,k} \quad ,$$

wobei die $B_{i,j,k}^m$ die *Bernstein*-Polynome über dem Dreieck $\Delta(\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T})$ und die $\mathbf{b}_{i,j,k}$ die Kontrollpunkte sind. Für die $B_{i,j,k}^m$ gilt

$$B_{i,j,k}^m(u, v) = \binom{m}{i \ j \ k} \rho(u, v)^i \sigma(u, v)^j \tau(u, v)^k \quad .$$

$\rho(u, v)$, $\sigma(u, v)$ und $\tau(u, v)$ sind dabei die baryzentrischen Koordinaten von (u, v) bezüglich der Punkte \mathbf{R} , \mathbf{S} und \mathbf{T} .

1.6.3 TP-B-Spline-Flächen

Eine TP-B-Spline-Fläche $\mathbf{F}(u, v)$ vom Grad (m, n) über dem rechteckigen Parametergebiet $D^{(u,v)} = [t_{u,m}, t_{u,p}] \times [t_{v,n}, t_{v,q}]$, festgelegt durch die Knotenvektoren $\mathbf{U} = [t_{u,0}, \dots, t_{u,m}, \dots, t_{u,p}, \dots, t_{u,p+m}]$ und $\mathbf{V} = [t_{v,0}, \dots, t_{v,n}, \dots, t_{v,q}, \dots, t_{v,q+n}]$, hat die Form

$$\mathbf{F}(u, v) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} N_i^{m,\mathbf{U}}(u) N_j^{n,\mathbf{V}}(v) \mathbf{d}_{i,j} \quad , \quad (1.1)$$

wobei die $N_\alpha^{\beta,\mathbf{T}}$ die normalisierten B-Spline-Basisfunktionen und die $\mathbf{d}_{i,j}$ die Kontrollpunkte sind. Die $N_\alpha^{\beta,\mathbf{T}}$ über dem Knotenvektor $\mathbf{T} = [t_0, \dots, t_\beta, \dots, t_\gamma, \dots, t_{\gamma+\beta}]$ sind durch

$$N_\alpha^{0,\mathbf{T}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in [t_\alpha, t_{\alpha+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_\alpha^{\beta,\mathbf{T}}(t) = \frac{t - t_\alpha}{t_{\alpha+\beta} - t_\alpha} N_\alpha^{\beta-1,\mathbf{T}}(t) + \frac{t_{\alpha+\beta+1} - t}{t_{\alpha+\beta+1} - t_{\alpha+1}} N_{\alpha+1}^{\beta-1,\mathbf{T}}(t) \quad , \quad \beta > 0$$

definiert. Da in dieser Arbeit vorwiegend bikubische TP-B-Spline-Flächen auftreten, deren zugeordneter Knotenvektor klar aus dem jeweiligen Zusammenhang erkennbar ist, wird im Folgenden die abkürzende Schreibweise $N_\alpha \equiv N_\alpha^{3,\mathbf{T}}$ verwendet.

1.6.4 Konvertieren einer beliebigen Polynomfläche in TP-B-Spline-Darstellung

Da fast alle gängigen CAD-Systeme TP-B-Spline-Flächen unterstützen, kann eine Konvertierung der erzeugten Polynomflächen in diese Darstellung wünschenswert sein.

Jede beliebige bivariate Polynomfläche vom Grad (m, n) kann als TP-B-Spline-Fläche dargestellt werden. Dies liegt an der Tatsache, dass die in Gleichung 1.1 auftretenden Produkte $N_i^{m,\mathbf{U}}(u) N_j^{n,\mathbf{V}}(v)$ der normalisierten B-Spline-Basisfunktionen eine Basis des bivariaten Polynomraums $\pi_m \times \pi_n$ bilden.

Eine einfache, aber nicht unbedingt effiziente Methode der Konvertierung ist die Folgende. Die zu konvertierende Polynomfläche \mathbf{F} kann durch Ausmultiplizieren in Binomialdarstellung

$$\mathbf{F}(u, v) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \mathbf{a}_{k,l} u^k v^l \quad (1.2)$$

gebracht werden. Gleiches Vorgehen für die Produkte der normalisierten B-Spline-Basisfunktionen liefert

$$N_i^{m,\mathbf{U}}(u) N_j^{n,\mathbf{V}}(v) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n c_{k,l;i,j} u^k v^l \quad ,$$

wobei als Knotenvektoren \mathbf{U} und \mathbf{V} beliebige $(2m+2)$ -elementige beziehungsweise $(2n+2)$ -elementige Knotenvektoren mit $t_{u,m} < t_{u,m+1}$ beziehungsweise $t_{v,n} < t_{v,n+1}$ verwendet werden können. Einsetzen in Gleichung 1.1 führt auf

$$\mathbf{F}(u, v) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{k,l;i,j} \mathbf{d}_{i,j} \right) u^k v^l \quad . \quad (1.3)$$

Gleichsetzen von (1.2) und (1.3) und anschließender Koeffizientenvergleich liefert das eindeutig lösbare lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{a}_{k,l} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{k,l;i,j} \mathbf{d}_{i,j} \quad , \quad k = 0, \dots, m \quad , \quad l = 0, \dots, n$$

zur Berechnung der gesuchten Kontrollpunkte $\mathbf{d}_{i,j}$.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden für Polynomflächen die jeweils günstigsten Darstellungen verwendet. Eine abschließende Konvertierung in TP-B-Spline-Form wird nicht mehr vorgenommen, kann aber bei Bedarf nach dem eben präsentierten Schema erfolgen.

1.6.5 Kompositionen von Polynomflächen

In Kapitel 4 dieser Arbeit treten häufig Kompositionen von Polynomflächen auf. Obwohl der Grad dieser Flächen teilweise sehr hoch ist, handelt es sich aufgrund der Tatsache, dass es sich um Kompositionen handelt, um relativ harmlose Konstrukte. **Es wird ausdrücklich empfohlen, diese Kompositionen von Polynomflächen als solche im Speicher zu halten und auch als solche auszuwerten.** Der damit verbundene Gewinn an Rechenzeit und Speicherplatz ist enorm.

Als Beispiel können hier die in Kapitel 4 vorkommenden Blending-Streifen genannt werden.

Ein Blending-Streifen hat die Form

$$\mathcal{F}(U, V) = \underbrace{H^\downarrow(U, V)}_{\text{Grad (0,7)}} \cdot \underbrace{\mathbf{F}^\downarrow(\mathbf{G}^\downarrow(U, V))}_{\text{Grad (5,1)}} + \underbrace{H^\uparrow(U, V)}_{\text{Grad (0,7)}} \cdot \underbrace{\mathbf{F}^\uparrow(\mathbf{G}^\uparrow(U, V))}_{\text{Grad (5,1)}} \quad ,$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Grad (30,6)}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Grad (30,6)}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Grad (30,13)}}$$

wobei die Polynomflächen $\mathbf{F}^\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vom Grad (3, 3), die Polynomflächen $\mathbf{G}^\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vom Grad (5, 1) und die Polynomflächen $H^\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad (0, 7) sind.

Wertet man \mathcal{F} als B-Spline-Fläche vom Grad (30, 13) mit dem *de Boor*-Algorithmus aus, sind dafür 29574 arithmetische Operationen (Additionen, Multiplikationen) erforderlich. Wertet man dieselbe Fläche in Form ihrer Teilflächen aus, benötigt man nur 960 arithmetische Operationen. Dies entspricht einer Verbesserung der Auswertegeschwindigkeit um den Faktor 30.

Speichert man \mathcal{F} als Polynomfläche vom Grad (30, 13) sind dafür 1302 Gleitkomma-Werte erforderlich. Wird die Gesamtfläche \mathcal{F} dagegen in Form ihrer Teilflächen verwaltet, werden nur 160 Gleitkomma-Werte benötigt. Der Speicherplatzbedarf sinkt etwa um den Faktor 8.

Kapitel 2

Vorbereitende Schritte

Voraussetzung für dieses und damit auch alle weiteren Kapitel ist eine Approximation der zu rekonstruierenden Oberfläche in Form eines fehlerfreien Dreiecksnetzes.

Um die in dieser Diplomarbeit entwickelten Verfahren zur Realisierung C^0 -stetiger beziehungsweise C^2 -stetiger Übergänge zwischen Primärflächen anwenden zu können, muss das gegebene Dreiecksnetz zuerst durch TP-B-Spline-Flächen¹ approximiert werden. Dies geschieht in drei Schritten:

- **Segmentieren des gegebenen Dreiecksnetzes:**

Der Benutzer zerlegt das Dreiecksnetz mit Hilfe eines interaktiven Tools in mehrere Segmente.

- **Parametrisieren der einzelnen Segmente:**

Um die Segmente durch jeweils eine TP-B-Spline-Fläche approximieren zu können, müssen den Punkten dieser Segmente Parameterwerte zugewiesen werden.

- **Approximieren der einzelnen Segmente:**

Jedes der nun parametrisierten Segmente wird durch jeweils eine TP-B-Spline-Fläche approximiert.

Im Folgenden werden diese Schritte detailliert erläutert.

2.1 Segmentieren des gegebenen Dreiecksnetzes

Da komplexe geometrische Formen meist nur unzureichend durch eine einzige B-Spline-Fläche approximiert werden können, zerteilt man das Dreiecksnetz der zu rekonstruierenden Ober-

¹Die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren sind unabhängig vom Typ der approximierenden Flächen. Da jedoch eines der Ziele dieser Arbeit die Erzeugung einer polynomiellen Gesamtfläche ist, werden an dieser Stelle TP-B-Spline-Flächen zur Approximation der einzelnen Segmente verwendet.

fläche in mehrere Segmente. Jedes dieser Segmente wird unabhängig von den anderen durch eine B-Spline-Fläche approximiert.

Die im Rahmen dieser Diplomarbeit entwickelten Verfahren zur C^0 -stetigen beziehungsweise C^2 -stetigen Oberflächen-Rekonstruktion sind stark abhängig von der gewählten Segmentierung. Um zufriedenstellende Rekonstruktionsergebnisse zu erzielen, müssen bei der Segmentierung verschiedene Grundsätze eingehalten werden. Diese werden in den Abschnitten 3.7 und 4.6 ausführlich erläutert.

Um dem Anwender die Möglichkeit zu bieten, Einfluss auf die Segmentierung und damit auch auf die Rekonstruktionsergebnisse zu nehmen, wurde von einer automatischen Segmentierung abgesehen. Stattdessen wurde ein interaktives Tool entwickelt, mit dessen Hilfe der Benutzer Dreiecksnetze schnell und bequem in einzelne Segmente zerlegen kann.

Das Segmentierungs-Tool bietet die Möglichkeit, eine Segmentgrenze durch Markierung (anklicken mit dem Mauszeiger) weniger Punkte festzulegen. Die Segmentgrenze wird von den Kanten gebildet, die auf den kürzesten Pfaden zwischen jeweils zwei hintereinander markierten Punkten liegen.

In den meisten Fällen zeichnet sich eine gute Segmentierung dadurch aus, dass die Segmentgrenzen entlang vorhandener Knicks und scharfer Kanten im Dreiecksnetz verlaufen. Deshalb werden bei der Berechnung der kürzesten Pfade im Dreiecksnetz nicht nur die Längen der enthaltenen Kanten sondern auch die Zwischenwinkel der an diese Kanten angrenzenden Dreieckspaare berücksichtigt. Einem aus den Kanten $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$ bestehenden Pfad wird die Länge $\sum_{i=1}^N \|\mathcal{E}_i\| \cdot \angle(\mathcal{E}_i)$ zugeordnet, wobei $\|\mathcal{E}_i\|$ die Länge der Kante \mathcal{E}_i und $\angle(\mathcal{E}_i)$ der von den an der Kante \mathcal{E}_i hängenden Dreiecken gebildete Winkel ist.

In Abbildung 2.1 ist zu sehen, wie eine längere Segmentgrenze entlang eines im Dreiecksnetz vorhandenen Knicks durch nur drei Mausklicks erzeugt wurde. Die angeklickten Punkte des

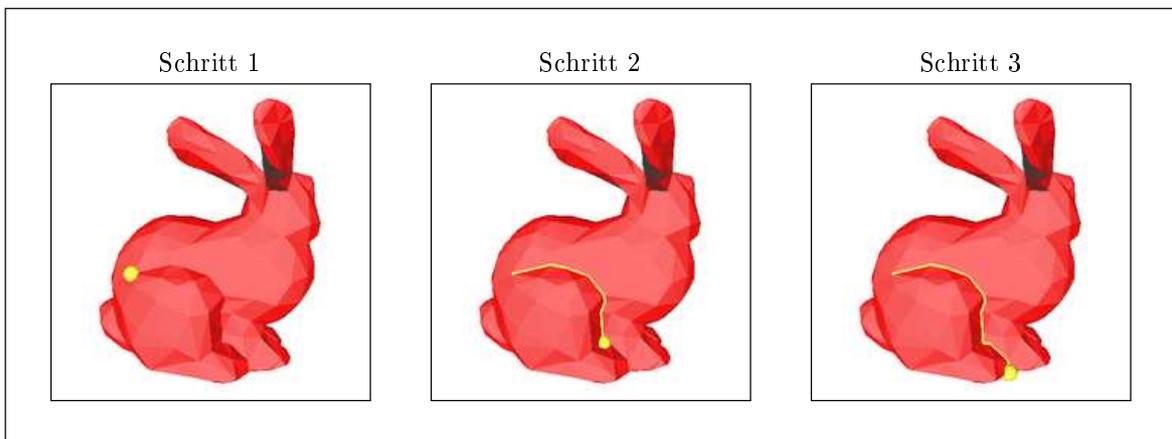


Abbildung 2.1: Erzeugen einer längeren Segmentgrenze durch nur drei Mausklicks

Dreiecksnetzes wurden jeweils durch gelbe Kugeln kenntlich gemacht.

Bei der Segmentierung ist unbedingt zu beachten, dass jedes der Segmente homöomorph zu einer Scheibe ist, also im Fall von nicht *Möbius*-artigen Strukturen genau einen Rand besitzt. Diese Forderung liegt darin begründet, dass Segmente die diese Bedingung nicht erfüllen, zum Beispiel ringförmige Segmente oder Segmente mit Löchern, im Allgemeinen nicht sinnvoll parametrisiert werden können.

Abbildung 2.2 zeigt drei mit dem entwickelten Tool segmentierte Dreiecksnetze. Verschiedene Segmente sind in verschiedenen Farben dargestellt.

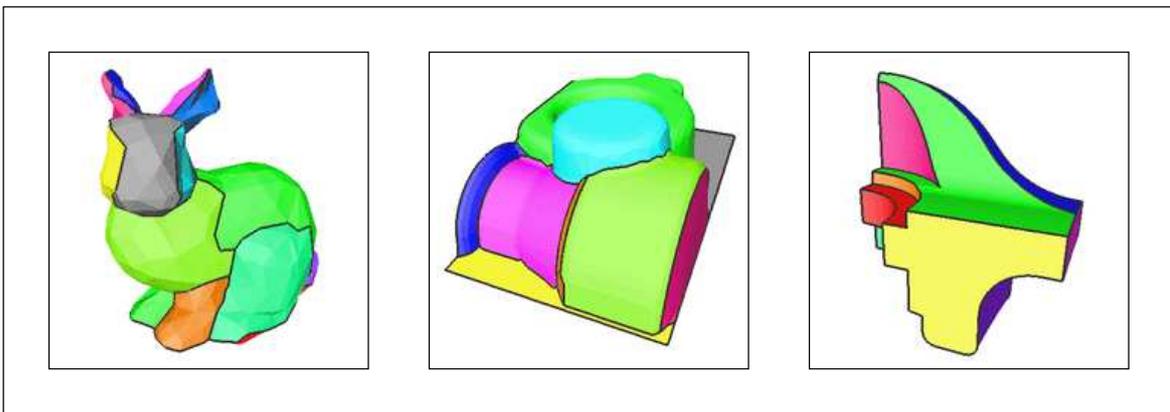


Abbildung 2.2: Segmentierte Dreiecksnetze

2.2 Parametrisieren der einzelnen Segmente

Um den durch ein Dreiecksnetz-Segment repräsentierten Teil einer Oberfläche zu approximieren, werden die Punkte $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N \in \mathbb{R}^3$ dieses Segments durch eine B-Spline-Fläche $\mathbf{F}(u, v)$ approximiert oder interpoliert. Dazu ist es notwendig, den Punkten $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ Parameterwerte $\mathbf{p}_1 = (u_1, v_1), \dots, \mathbf{p}_N = (u_N, v_N)$ zuzuweisen. Eine derartige Parametrisierung hat erheblichen Einfluss auf die Form und damit auch die Qualität der approximierenden B-Spline-Fläche.

Eine gute Parametrisierung zu finden ist eine schwierige Angelegenheit, auf die im Folgenden nur kurz eingegangen wird. Dem an diesem Thema interessierten Leser sei [Horm01] empfohlen. Darin werden verschiedene Parametrisierungstechniken und deren Vor- und Nachteile detailliert beschrieben.

Sei \mathcal{T} das gegebene Dreiecksnetz-Segment und $\psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dessen Parametrisierung, das heißt es gilt $\psi(\mathbf{r}_i) = \mathbf{p}_i$. Im Wesentlichen handelt es sich bei ψ genau dann um eine gute Parametrisierung, wenn ψ die Verzerrung des Segmentbildes $\psi(\mathcal{T})$ im Vergleich zum Original \mathcal{T} minimiert.

In dieser Arbeit wurde die in [LePe02] beschriebene Methode zur Parametrisierung von Dreiecksnetz-Segmenten verwendet. Ihr Grundprinzip wird im Folgenden kurz erläutert.

Als Ansatz für ψ wird eine stückweise affine Abbildung gewählt. Gilt

$$\mathbf{n}(u, v) \times \frac{\partial}{\partial u} \psi^{-1}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \psi^{-1}(u, v) \quad , \quad (2.1)$$

wobei $\mathbf{n}(u, v)$ die Normale am Punkt $\psi^{-1}(u, v)$ ist, wurde die oben erwähnte Verzerrung vollständig eliminiert (Iso- u -Linien und Iso- v -Linien stehen im \mathbb{R}^3 stets senkrecht und werden mit der gleichen Geschwindigkeit durchlaufen). Aufgrund des verwendeten Ansatzes kann diese Forderung im Allgemeinen nicht für alle (u, v) erfüllt werden. Die Verletzung von Gleichung 2.1 wird daher im Sinne kleinster Fehlerquadrate minimiert. Legt man zwei beliebige Parameterpunkte \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_j , $i \neq j$, fest, führt dies auf ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem für die gesuchten \mathbf{p}_k , $k \neq i$, $k \neq j$.

In Abbildung 2.3 ist ein Beispiel, die Parametrisierung eines der vier Segmente eines deformierten Tetraeders, zu sehen.

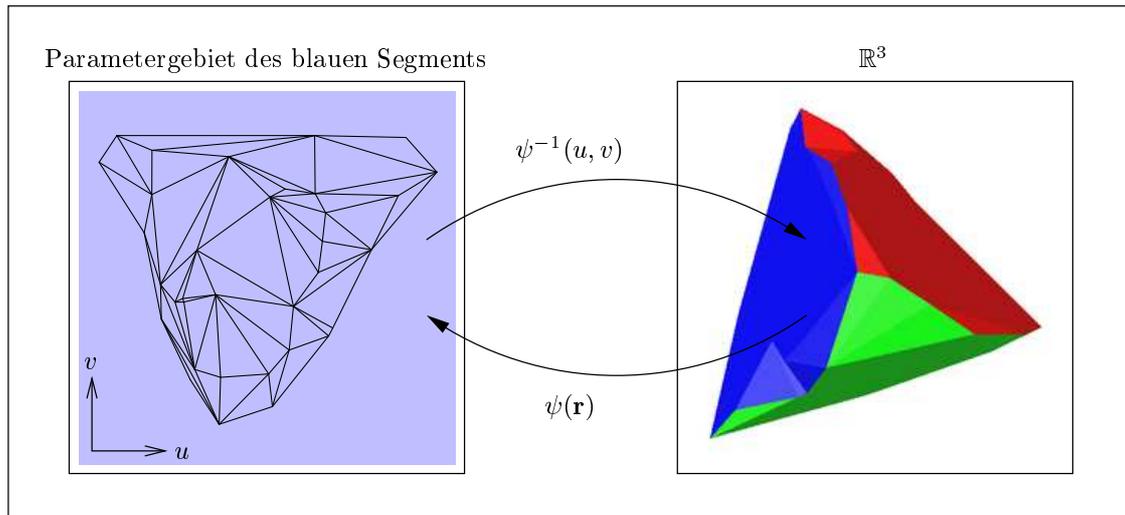


Abbildung 2.3: Die Parametrisierung eines Dreiecksnetz-Segments

2.3 Approximieren der einzelnen Segmente

Um den durch ein Dreiecksnetz-Segment repräsentierten Teil einer Oberfläche mit einer C^2 -stetigen Fläche darzustellen, werden die Punkte $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N \in \mathbb{R}^3$ dieses Segments durch eine bikubische TP-B-Spline-Fläche $\mathbf{F}(u, v)$ approximiert oder interpoliert. In der Regel begnügt man sich mit einer Approximation der Punkte, da bei einer Interpolation häufig unerwünschte Nebeneffekte, wie zum Beispiel Überschwingen, auftreten. Gerade bei verrauschten Daten

liefert eine Interpolation extrem wellige Flächen, obwohl eigentlich relativ glatte Flächen wünschenswert wären. Um dem entgegen zu wirken minimiert man meistens eine Kombination aus einem Fehler- und einem Glattheitsfunktional. Dies führt einerseits zu einer akzeptablen Approximation der $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$, andererseits zu einer optisch gut aussehenden Fläche.

Für die in dieser Diplomarbeit entwickelten Verfahren zur C^0 -stetigen beziehungsweise C^2 -stetigen Oberflächen-Rekonstruktion ist es notwendig beziehungsweise zweckmäßig, ein kombiniertes Interpolations-Approximations-Problem zu lösen. Punkte auf dem Rand des Dreiecksnetzes, an denen zwei oder mehr Segmente zusammenstoßen, und Punkte im Inneren des Dreiecksnetzes, an denen drei oder mehr Segmente zusammenstoßen (im Folgenden werden diese Punkte als **Sternpunkte** bezeichnet; diese Bezeichnung hat ihren Ursprung in der Tatsache, dass an diesen Punkten die Segmentgrenzen sternförmig zusammenlaufen), müssen von den diesen Segmenten zugeordneten B-Spline-Flächen interpoliert werden². Um die oben erwähnten Negativeffekte der Interpolation zu vermeiden, werden alle übrigen Punkte nur approximiert wobei gleichzeitig ein Glattheitsfunktional minimiert wird.

Seien $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M$ die Interpolationspunkte und $\mathbf{r}_{M+1}, \dots, \mathbf{r}_N$ die Approximationspunkte. Gesucht ist die bikubische TP-B-Spline-Fläche

$$\mathbf{F}(u, v) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} N_i^{3, \mathbf{U}}(u) N_j^{3, \mathbf{V}}(v) \mathbf{d}_{i,j} \quad (2.2)$$

mit festgelegten, uniformen Knotenvektoren $\mathbf{U} = [t_{u,0}, \dots, t_{u,p+3}]$, $t_{u,\alpha} = t_{u,0} + \alpha \Delta t_u$, und $\mathbf{V} = [t_{v,0}, \dots, t_{v,q+3}]$, $t_{v,\beta} = t_{v,0} + \beta \Delta t_v$, die das kombinierte Glattheits-Fehler-Funktional

$$\mathcal{K}_\mu(\mathbf{F}) = \mathcal{E}(\mathbf{F}) + \mu \mathcal{J}(\mathbf{F}) \quad (2.3)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{F}) = \sum_{k=M+1}^N (\mathbf{F}(u_k, v_k) - \mathbf{r}_k)^2 \quad (2.4)$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{F}) = \int_{t_{u,3}}^{t_{u,p}} \int_{t_{v,3}}^{t_{v,q}} du dv ((\mathbf{F}_{uu})^2 + 2(\mathbf{F}_{uv})^2 + (\mathbf{F}_{vv})^2) \quad (2.5)$$

unter den Nebenbedingungen $\mathbf{F}(u_\gamma, v_\gamma) = \mathbf{r}_\gamma$, $\gamma = 1, \dots, M$, minimiert. Um die Lösung mit Hilfe von *Lagrangeschen* Multiplikatoren ermitteln zu können (siehe [Grab98b]), müssen die Ableitungen des Glattheits-Fehler-Funktional nach den unbekanntem Kontrollpunkten $\mathbf{d}_{i,j}$ berechnet werden.

²Das in Kapitel 3 präsentierte Verfahren zur C^0 -stetigen Oberflächen-Rekonstruktion setzt die Interpolation aller Stern-Punkte voraus. Für das in Kapitel 4 vorgestellte Verfahren zur C^2 -stetigen Oberflächen-Rekonstruktion ist es vorteilhaft jedoch nicht unbedingt erforderlich ein derartiges Interpolations-Approximations-Problem zu lösen.

Das Fehlerfunktional \mathcal{E}

Das verwendete Fehlerfunktional \mathcal{E} ist die Summe der quadratischen Abweichungen. Durch Einsetzen von Gleichung (2.2) in (2.4) erhält man

$$\mathcal{E}(\mathbf{F}) = \sum_{k=M+1}^N \left(\left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} N_i(u_k) N_j(v_k) \mathbf{d}_{i,j} \right) - \mathbf{r}_k \right)^2 .$$

Die partiellen Ableitungen von \mathcal{E} lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_{\alpha,\beta}} \mathcal{E}(\mathbf{d}_{0,0}, \dots, \mathbf{d}_{p-1,q-1}) &= \\ &= \sum_{k=M+1}^N 2 \left(\left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} N_i(u_k) N_j(v_k) \mathbf{d}_{i,j} \right) - \mathbf{r}_k \right) N_\alpha(u_k) N_\beta(v_k) . \end{aligned}$$

Das Glattheitsfunktional \mathcal{J}

Das verwendete Glattheitsfunktional \mathcal{J} wird auch als vereinfachte *Thin-Plate-Energy* bezeichnet. Es kann in die zweckmäßigere Form

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{F}) &= \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{q-1} \mathbf{d}_{i,j} \mathbf{d}_{k,l} \\ &\quad \left(\underbrace{\int_{t_{u,3}}^{t_{u,p}} du \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} N_i(u) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} N_k(u) \right)}_{=A_{i,k}} \cdot \underbrace{\int_{t_{v,3}}^{t_{v,q}} dv N_j(v) N_l(v)}_{=B_{j,l}} + \right. \\ &\quad \left. 2 \cdot \underbrace{\int_{t_{u,3}}^{t_{u,p}} du \left(\frac{\partial}{\partial u} N_i(u) \right) \left(\frac{\partial}{\partial u} N_k(u) \right)}_{=C_{i,k}} \cdot \underbrace{\int_{t_{v,3}}^{t_{v,q}} dv \left(\frac{\partial}{\partial v} N_j(v) \right) \left(\frac{\partial}{\partial v} N_l(v) \right)}_{=D_{j,l}} + \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\int_{t_{u,3}}^{t_{u,p}} du N_i(u) N_k(u)}_{=E_{i,k}} \cdot \underbrace{\int_{t_{v,3}}^{t_{v,q}} dv \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} N_j(v) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} N_l(v) \right)}_{=F_{j,l}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{q-1} \mathbf{d}_{i,j} \mathbf{d}_{k,l} (A_{i,k} B_{j,l} + 2 C_{i,k} D_{j,l} + E_{i,k} F_{j,l}) = \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{q-1} \mathbf{d}_{i,j} \mathbf{d}_{k,l} G_{i,j,k,l}
\end{aligned}$$

überführt werden. Die Konstanten $G_{i,j,k,l}$ können problemlos analytisch berechnet werden, da es sich lediglich um Integrale über bivariate stückweise Polynome handelt. Aufgrund vorhandener Symmetrien müssen nur wenige Kombinationen von i, j, k und l ausgewertet werden. Bei verschiedenen Knotenvektoren unterscheiden sich die $G_{i,j,k,l}$ lediglich um von Δt_u und Δt_v bestimmte Faktoren. Eine einmalige Berechnung einiger weniger Integrale ist daher ausreichend. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dafür ein *Maple*-Programm geschrieben.

Die partiellen Ableitungen von \mathcal{J} lauten

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_{\alpha,\beta}} \mathcal{J}(\mathbf{d}_{0,0}, \dots, \mathbf{d}_{p-1,q-1}) = \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{q-1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_{\alpha,\beta}} (\mathbf{d}_{i,j} \mathbf{d}_{k,l}) \right) G_{i,j,k,l} = \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{q-1} (\delta_{i,\alpha} \delta_{j,\beta} \mathbf{d}_{k,l} + \mathbf{d}_{i,j} \delta_{k,\alpha} \delta_{l,\beta}) G_{i,j,k,l} = \\
&= 2 \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \mathbf{d}_{i,j} G_{i,j,\alpha,\beta} .
\end{aligned}$$

Die gesuchten Kontrollpunkte $\mathbf{d}_{i,j}$ ergeben sich schließlich durch Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} N_i(u_\gamma) N_j(v_\gamma) \mathbf{d}_{i,j} = \mathbf{r}_\gamma \quad , \quad \gamma = 1, \dots, M$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_{\alpha,\beta}} \mathcal{K}_\mu(\mathbf{d}_{0,0}, \dots, \mathbf{d}_{p-1,q-1}) = \sum_{k=1}^M \lambda_k N_\alpha(u_k) N_\beta(v_k) \quad , \quad \alpha = 0, \dots, p-1 \quad ,$$

$$\beta = 0, \dots, q-1 \quad ,$$

wobei die λ_k die bereits erwähnten *Lagrange*-Multiplikatoren sind. Zur Lösung dieses Systems kann zum Beispiel der *Gauß*-Algorithmus mit relativer Spaltenmaximum-Strategie verwendet werden (siehe [Grab00]).

Durch den Parameter μ kann der Benutzer das Verhältnis zwischen Genauigkeit und Glattheit der approximierenden Fläche \mathbf{F} steuern.

Die die Knotenvektoren bestimmenden Werte $t_{u,0}$, Δt_u , $t_{v,0}$ und Δt_v sollten so gewählt werden, dass das Bild $\psi(\mathcal{T})$ des Dreiecksnetz-Segmentes im Parametergebiet den Bereich, in dem die Basisfunktionen eine vollständige Basis bilden, also $[t_{u,3}, \dots, t_{u,p}] \times [t_{v,3}, \dots, t_{v,q}]$, bis auf einen Rand von etwa 10% ausfüllt.

In Abbildung 2.4 ist ein durch B-Spline-Flächen approximiertes Dreiecksnetz zu sehen. Das mittlere Bild zeigt die ungetrimmten Flächen. Beim rechten Bild wurden diese Flächen entlang des Segmentrandes im Parametergebiet getrimmt.

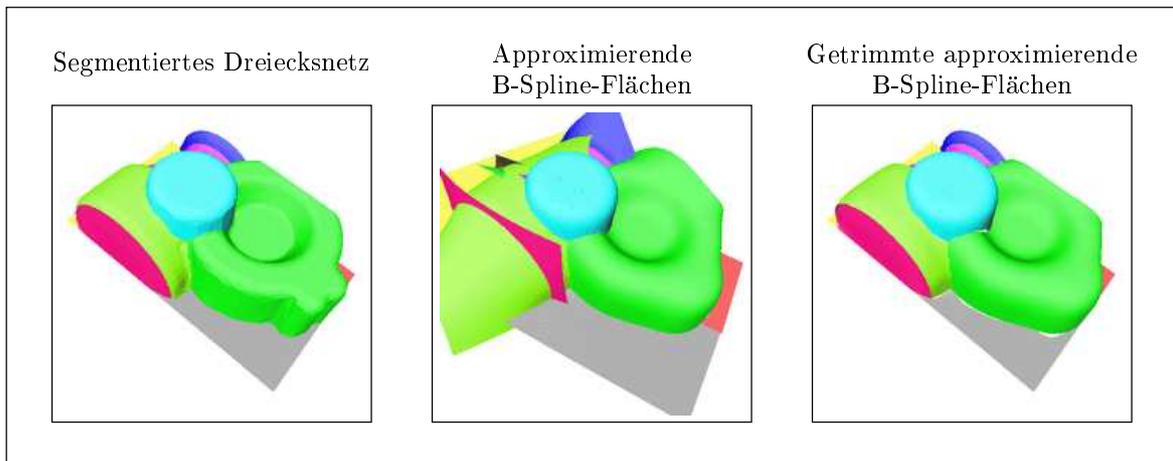


Abbildung 2.4: Approximation eines Dreiecksnetzes durch B-Spline-Flächen

Weiterführende Informationen zur Approximation sind in [Horm01] zu finden.

Kapitel 3

C^0 -stetige Übergänge zwischen Primärflächen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die im letzten Kapitel besprochenen Schritte ausgeführt wurden. Das gegebene Dreiecksnetz wurde segmentiert und die einzelnen Segmente parametrisiert und durch jeweils eine C^2 -stetige B-Spline-Fläche approximiert.

Ziel ist es nun, eine C^0 -stetige Gesamtfläche zu berechnen, die die Form des Dreiecksnetzes nachempfundenet.

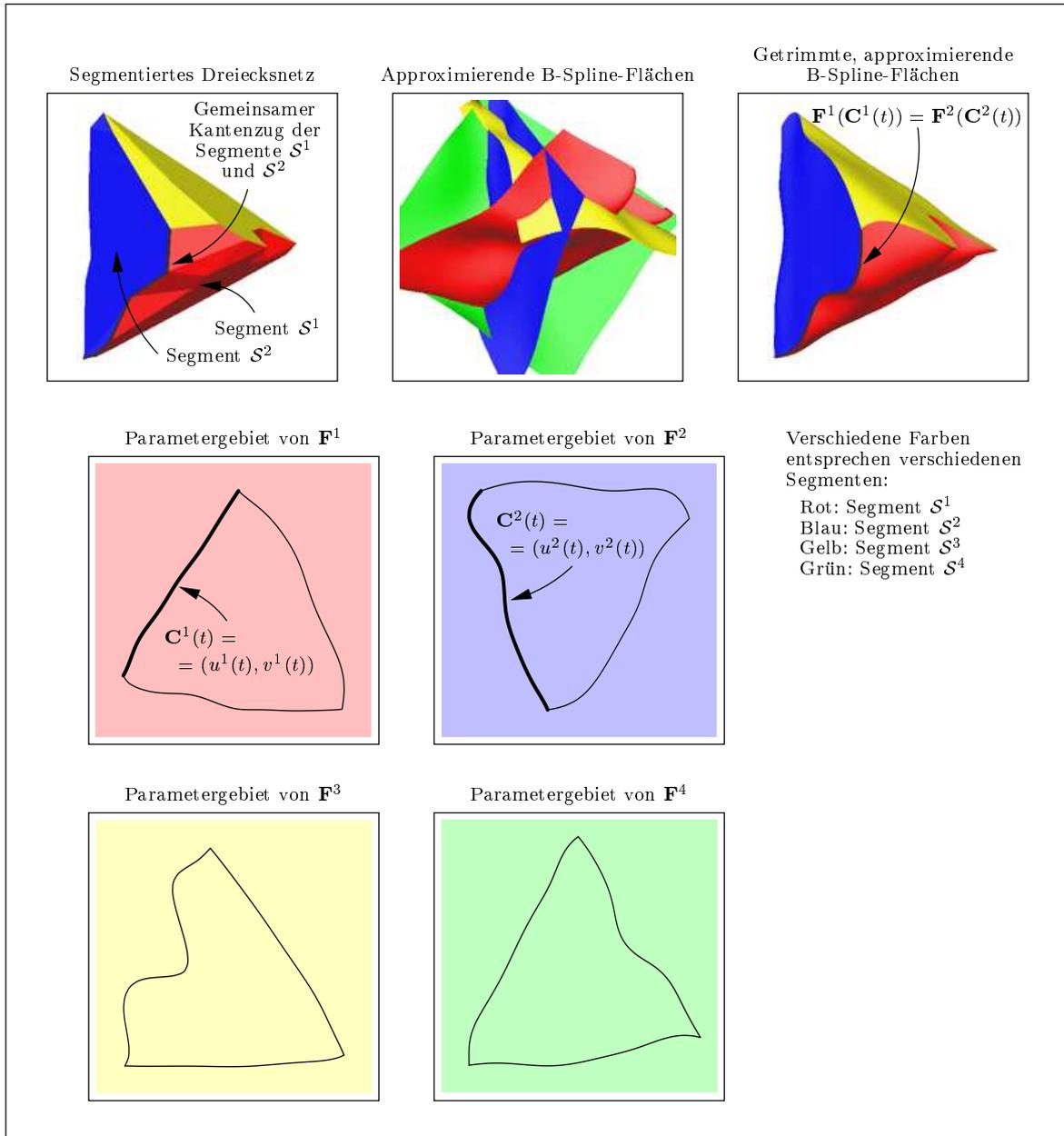
3.1 Grundprinzip des Verfahrens

Die C^0 -stetigen Übergänge zwischen den B-Spline-Flächen sollen durch Berechnung geeigneter Trimming-Kurven für diese Flächen realisiert werden.

Für jeden gemeinsamen Kantenzug zweier zusammenstoßender Segmente \mathcal{S}^α und \mathcal{S}^β , ist die diesem Kantenzug entsprechende Schnittkurve seiner zugeordneten B-Spline-Flächen \mathbf{F}^α und \mathbf{F}^β zu berechnen. Diese Berechnung muss in Parameterdarstellung¹ in beiden Parametergebieten erfolgen. Das bedeutet, es werden Kurven $\mathbf{C}^\alpha(t) = (u^\alpha(t), v^\alpha(t))$ und $\mathbf{C}^\beta(t) = (u^\beta(t), v^\beta(t))$ gesucht, für die $\mathbf{F}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha(t)) = \mathbf{F}^\beta(\mathbf{C}^\beta(t))$ gilt.

Abbildung 3.1 verdeutlicht dieses Grundprinzip anhand eines Beispiels. Der deformierte Tetraeder wurde in vier Segmente zerlegt. Jedes dieser Segmente wurde durch eine B-Spline-Fläche approximiert. Insgesamt existieren sechs gemeinsame Kantenzüge, wobei für jeden solchen Kantenzug jeweils eine Trimming-Kurve in beiden zugeordneten Parametergebieten berechnet wurde. Der Kantenzug, an dem die Segmente \mathcal{S}^1 (rotes Segment) und \mathcal{S}^2 (blaues Segment) zusammenstoßen (dargestellt durch einen schwarzen Linienzug), wird zur Veranschaulichung des eben erläuterten Grundprinzips in Abbildung 3.1 detailliert betrachtet.

¹Als Parameterdarstellung einer auf einer B-Spline-Fläche $\mathbf{F} : D^{(u,v)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ verlaufenden Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbf{F}$ wird im Folgenden eine Form $(u(t), v(t))$ bezeichnet, für die $\mathcal{C} = \{\mathbf{F}(u(t), v(t)) | t \in \mathbb{R}, (u(t), v(t)) \in D^{(u,v)}\}$ gilt.

Abbildung 3.1: Das Grundprinzip der C^0 -stetigen Oberflächenrekonstruktion

Die zu berechnenden Trimming-Kurven sollen ebenfalls in B-Spline-Darstellung angegeben werden können. Es muss sich also um Polynomkurven handeln. Leider scheidet damit eine exakte Lösung aus, da die Schnittkurven zweier Polynomflächen im Allgemeinen keine Polynomkurven sind. Dies gilt sowohl für die Parameterdarstellungen der Schnittkurven als auch für ihre zugeordneten Raumkurven. Das folgende Beispiel beweist diese Aussage.

Seien $\mathbf{F} = (u, v, -u^2 - v^2)$ und $\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, -1)$ zwei Polynomflächen. Bei \mathbf{F} handelt es sich um ein Paraboloid, bei $\tilde{\mathbf{F}}$ um eine Ebene. Gleichsetzen der beiden Flächen liefert die Gleichungen $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ und $u^2 + v^2 = 1$. Das bedeutet sowohl bei den beiden Parameterdarstellungen der Schnittkurve als auch ihrer zugeordneten Raumkurve handelt es sich um Kreise mit Radius 1 (Abbildung 3.2). Kreise lassen sich in parametrischer Form leicht durch Sinus und Cosinus, niemals aber durch endliche Polynome ausdrücken.

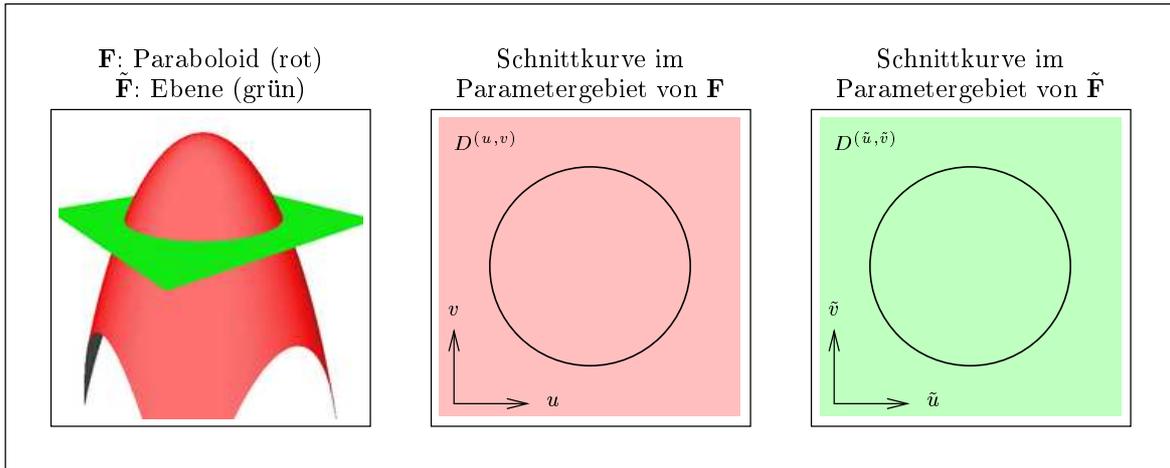


Abbildung 3.2: Die Schnittkurve eines Paraboloids und einer Ebene

Da eine exakte Berechnung also ausscheidet, wurde ein numerisches Verfahren entwickelt, mit dem die Schnittkurve \mathcal{C} zweier B-Spline-Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ beliebig genau durch stückweise Polynomkurven genähert werden kann. Um das Verständnis der folgenden Abschnitte zu erleichtern und dem Leser bereits jetzt einen Überblick über den Stoff dieses Kapitels zu verschaffen, werden die wesentlichen Schritte des hier präsentierten Verfahrens zur Schnittkurven-Approximation kurz erläutert.

Zuerst wird, ausgehend von einem bekannten gemeinsamen Punkt $(u^\alpha, v^\alpha, \tilde{u}^\alpha, \tilde{v}^\alpha)$ beider Parameterdarstellungen der Schnittkurve \mathcal{C} , das heißt es gilt $\mathbf{F}(u^\alpha, v^\alpha) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}^\alpha, \tilde{v}^\alpha) \in \mathcal{C}$, in beide Richtungen eine Folge von Punkten $[(u^\beta, v^\beta, \tilde{u}^\beta, \tilde{v}^\beta)]_{\beta=0, \dots, \alpha, \dots, N}$ auf dieser Schnittkurve ermittelt. Dies geschieht durch fortlaufende Iteration der folgenden beiden Schritte:

Schritt 1: Berechnung der *Taylor*-Entwicklungen der beiden Parameterdarstellungen von \mathcal{C} am letzten bekannten Punkt $(u^\beta, v^\beta, \tilde{u}^\beta, \tilde{v}^\beta)$ bis zu beliebig hoher Ordnung. Für diese Berechnung wurde im Rahmen dieser Arbeit eigens ein Verfahren entwickelt. In Form dieser *Taylor*-Entwicklungen liegen in der Umgebung von $(u^\beta, v^\beta, \tilde{u}^\beta, \tilde{v}^\beta)$ gute Näherungen der zu berechnenden Schnittkurve vor.

Schritt 2: Näherungsweise Voranschreiten auf der Schnittkurve mit Hilfe der *Taylor*-Entwicklung. Bei kleiner Schrittweite ist die Abweichung vom tatsächlichen Ver-

lauf der Schnittkurve minimal. Durch Lösung eines nicht-linearen Gleichungssystems mit Hilfe des *Newton*-Verfahrens wird der dieser Näherung nächstliegende, mit $(u^{\beta-1}, v^{\beta-1}, \tilde{u}^{\beta-1}, \tilde{v}^{\beta-1})$ beziehungsweise $(u^{\beta+1}, v^{\beta+1}, \tilde{u}^{\beta+1}, \tilde{v}^{\beta+1})$ bezeichnete Kurvenpunkt berechnet.

Die so gewonnene Folge von Punkten $[(u^\beta, v^\beta, \tilde{u}^\beta, \tilde{v}^\beta)]_{\beta=0, \dots, N}$ wird nun durch eine stückweise Polynomkurve interpoliert. Jeweils zwei benachbarte Punkte bilden die Endpunkte einer ihrer Teilkurven. Die im Rahmen der Taylor-Entwicklung berechneten ersten bis n -ten Ableitungen an diesen Punkten legen alle gesuchten Teilkurven vom Grad $2n + 1$ eindeutig fest und sorgen dafür, dass diese Teilkurven den tatsächlichen Verlauf der Schnittkurve optimal nachempfinden. Die Parameterdarstellungen von \mathcal{C} sind damit C^n -stetige, stückweise Polynomkurven.

3.2 Forderungen an die B-Spline-Flächen

Damit das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren zur numerischen Berechnung der Schnittkurve zweier B-Spline-Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ anwendbar ist, müssen diese Flächen drei Voraussetzungen erfüllen.

Die ersten beiden Voraussetzungen lauten

$$(V1) \quad \forall (u, v) \quad . \quad (u, v) \in D^{(u,v)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F}_u(u, v) \times \mathbf{F}_v(u, v) \neq 0$$

$$(V2) \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \quad . \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in D^{(\tilde{u}, \tilde{v})} \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq 0 \quad .$$

Das bedeutet, die Ableitungen in u -Richtung und v -Richtung beziehungsweise in \tilde{u} -Richtung und \tilde{v} -Richtung sind für alle Parameterpunkte linear unabhängig. Es handelt sich also um nicht-degenerierte Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$.

Außerdem muss

$$(V3) \quad \forall (u, v) \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \quad . \quad \left((u, v) \in D^{(u,v)} \wedge (\tilde{u}, \tilde{v}) \in D^{(\tilde{u}, \tilde{v})} \wedge \mathbf{F}(u, v) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right) \rightarrow$$

$$\left(\mathbf{F}_u(u, v) \times \mathbf{F}_v(u, v) \right) \times \left(\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right) \neq 0$$

erfüllt sein. Das heißt an allen Punkten ihrer Schnittkurve besitzen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ unterschiedliche Tangentialebenen. Bei echten Schnitten zwischen zwei Flächen ist dies stets erfüllt. Verletzt wird diese Eigenschaft lediglich von zwei sich berührenden Flächen.

3.3 Taylor-Entwicklungen einer Schnittkurve

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren präsentiert, mit dem die *Taylor*-Entwicklungen einer nach Bogenlänge parametrisierten Schnittkurve $\mathcal{C}(t) = \mathbf{F}(u(t), v(t)) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$, $\|\dot{\mathcal{C}}(t)\|_2 = 1$, zweier B-Spline-Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ und der dazugehörigen Parameterdarstellungen $(u(t), v(t))$ und $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ bis zu beliebig hoher Ordnung n berechnet werden können. Es wird davon ausgegangen, dass die Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ die Voraussetzungen (V1) bis (V3) erfüllen (Abschnitt 3.2).

Erforderlich ist lediglich die Kenntnis der Parameterdarstellung $(u_*, v_*, \tilde{u}_*, \tilde{v}_*)$ eines Punktes der Schnittkurve der beiden Flächen. Im Parameterbereich der Schnittkurve ist diesem Punkt der frei wählbare aber feste Wert t_* zugeordnet. Es gilt also $(u(t_*), v(t_*)) = (u_*, v_*)$, $(\tilde{u}(t_*), \tilde{v}(t_*)) = (\tilde{u}_*, \tilde{v}_*)$ und $\mathcal{C}(t_*) = \mathbf{F}(u_*, v_*) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}_*, \tilde{v}_*)$. Dieser Parameterwert t_* ist der Entwicklungspunkt der *Taylor*-Entwicklung.

Die zu bestimmenden *Taylor*-Polynome

$$u_T(t; t_*, n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} u_*^{(i)} (t - t_*)^i \approx u(t) \quad , \quad u_*^{(i)} = \left. \frac{d^i}{dt^i} u(t) \right|_{t=t_*}$$

$$v_T(t; t_*, n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} v_*^{(i)} (t - t_*)^i \approx v(t) \quad , \quad v_*^{(i)} = \left. \frac{d^i}{dt^i} v(t) \right|_{t=t_*}$$

$$\tilde{u}_T(t; t_*, n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \tilde{u}_*^{(i)} (t - t_*)^i \approx \tilde{u}(t) \quad , \quad \tilde{u}_*^{(i)} = \left. \frac{d^i}{dt^i} \tilde{u}(t) \right|_{t=t_*}$$

$$\tilde{v}_T(t; t_*, n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \tilde{v}_*^{(i)} (t - t_*)^i \approx \tilde{v}(t) \quad , \quad \tilde{v}_*^{(i)} = \left. \frac{d^i}{dt^i} \tilde{v}(t) \right|_{t=t_*}$$

$$\mathcal{C}_T(t; t_*, n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \mathcal{C}_*^{(i)} (t - t_*)^i \approx \mathcal{C}(t) \quad , \quad \mathcal{C}_*^{(i)} = \left. \frac{d^i}{dt^i} \mathcal{C}(t) \right|_{t=t_*}$$

werden durch die Ableitungen $u_*^{(i)}$, $v_*^{(i)}$, $\tilde{u}_*^{(i)}$, $\tilde{v}_*^{(i)}$ und $\mathcal{C}_*^{(i)}$ am Entwicklungspunkt t_* eindeutig bestimmt. In den folgenden Unterabschnitten wird erläutert, wie diese Ableitungen berechnet werden können.

3.3.1 Nullte Ableitungen

Die nullten Ableitungen am Entwicklungspunkt sind gleich den Funktionswerten am Entwicklungspunkt. Es gilt daher

$$\begin{aligned}
u_{\star}^{(0)} &= u_{\star} \\
v_{\star}^{(0)} &= v_{\star} \\
\tilde{u}_{\star}^{(0)} &= \tilde{u}_{\star} \\
\tilde{v}_{\star}^{(0)} &= \tilde{v}_{\star} \\
\mathcal{C}_{\star}^{(0)} &= \mathbf{F}(u_{\star}, v_{\star}) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}_{\star}, \tilde{v}_{\star}) \quad .
\end{aligned}$$

3.3.2 Erste Ableitungen

Der Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{T}_{\mathcal{C}}(t_{\star})$ der Schnittkurve $\mathcal{C}(t)$ am Entwicklungspunkt t_{\star} kann mit den Formeln

$$\mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_{\star}, v_{\star}) = \mathbf{F}_{u,\star} \times \mathbf{F}_{v,\star} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_{\star}, \tilde{v}_{\star}) = \tilde{\mathbf{F}}_{u,\star} \times \tilde{\mathbf{F}}_{v,\star} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C}}(t_{\star}) = \frac{\mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_{\star}, v_{\star}) \times \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_{\star}, \tilde{v}_{\star})}{\|\mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_{\star}, v_{\star}) \times \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_{\star}, \tilde{v}_{\star})\|} \quad (3.3)$$

berechnet werden, wobei $\mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_{\star}, v_{\star})$ und $\mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_{\star}, \tilde{v}_{\star})$ die Normalen der Tangentialebenen der beiden B-Spline-Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ am gemeinsamen Punkt $(u_{\star}, v_{\star}, \tilde{u}_{\star}, \tilde{v}_{\star})$ sind. Voraussetzung (V3) verhindert, dass es auf der rechten Seite von Gleichung (3.3) zu einer Division durch 0 kommt. Für die nach Bogenlänge parametrisierte Schnittkurve $\mathcal{C}(t)$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{\mathcal{C}}(t_{\star}) &= \left. \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t) \right|_{t=t_{\star}} = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{F}(u(t), v(t)) \right|_{t=t_{\star}} = \mathbf{F}_{u,\star} \dot{u}(t_{\star}) + \mathbf{F}_{v,\star} \dot{v}(t_{\star}) = \\
&= \mathbf{F}_{u,\star} u_{\star}^{(1)} + \mathbf{F}_{v,\star} v_{\star}^{(1)} \quad .
\end{aligned} \quad (3.4)$$

Multiplikation von Gleichung (3.4) mit den Vektoren $\mathbf{F}_{v,\star} \times \mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_{\star}, v_{\star})$ und $\mathbf{F}_{u,\star} \times \mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_{\star}, v_{\star})$ liefert die Formeln

$$u_{\star}^{(1)} = \frac{\langle \mathbf{T}_{\mathcal{C}}(t_{\star}), \mathbf{F}_{v,\star} \times \mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_{\star}, v_{\star}) \rangle}{\langle \mathbf{F}_{u,\star}, \mathbf{F}_{v,\star} \times \mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_{\star}, v_{\star}) \rangle} \quad (3.5)$$

$$v_{\star}^{(1)} = \frac{\langle \mathbf{T}_{\mathcal{C}}(t_{\star}), \mathbf{F}_{u,\star} \times \mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_{\star}, v_{\star}) \rangle}{\langle \mathbf{F}_{v,\star}, \mathbf{F}_{u,\star} \times \mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_{\star}, v_{\star}) \rangle} \quad (3.6)$$

zur Berechnung der ersten Ableitung der Parameterdarstellung $(u(t), v(t))$ am Entwicklungspunkt t_* . Nach dem gleichen Schema lassen sich die Formeln

$$\tilde{u}_*^{(1)} = \frac{\langle \mathbf{T}_{\mathcal{C}}(t_*), \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},*} \times \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_*, \tilde{v}_*) \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},*}, \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},*} \times \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_*, \tilde{v}_*) \rangle} \quad (3.7)$$

$$\tilde{v}_*^{(1)} = \frac{\langle \mathbf{T}_{\mathcal{C}}(t_*), \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},*} \times \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_*, \tilde{v}_*) \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},*}, \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},*} \times \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_*, \tilde{v}_*) \rangle} \quad (3.8)$$

aufstellen. Die Voraussetzungen (V1) und (V2) schließen bei den Gleichungen (3.5) bis (3.8) eine Division durch 0 aus. Die erste Ableitung der nach Bogenlänge parametrisierten Schnittkurve $\mathcal{C}(t)$ am Entwicklungspunkt ist natürlich gleich dem Tangenteneinheitsvektor an dieser Stelle. Es gilt also

$$\mathcal{C}_*^{(1)} = \mathbf{T}_{\mathcal{C}}(t_*) \quad .$$

3.3.3 Höhere Ableitungen

Sukzessives Ableiten von $\dot{\mathcal{C}}(t)$ und Einsetzen von t_* liefert

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{C}(t) \right|_{t=t_*} &= \\ &= \underbrace{\mathbf{F}_{uu,*} \left(u_*^{(1)} \right)^2 + 2 \mathbf{F}_{uv,*} u_*^{(1)} v_*^{(1)} + \mathbf{F}_{vv,*} \left(v_*^{(1)} \right)^2 + \mathbf{F}_{u,*} u_*^{(2)} + \mathbf{F}_{v,*} v_*^{(2)}}_{=\mathbf{G}_2(\mathbf{F}, u_*^{(0)}, u_*^{(1)}, v_*^{(0)}, v_*^{(1)})} = \\ &= \underbrace{\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u}\tilde{u},*} \left(\tilde{u}_*^{(1)} \right)^2 + 2 \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u}\tilde{v},*} \tilde{u}_*^{(1)} \tilde{v}_*^{(1)} + \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v}\tilde{v},*} \left(\tilde{v}_*^{(1)} \right)^2 + \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},*} \tilde{u}_*^{(2)} + \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},*} \tilde{v}_*^{(2)}}_{=\tilde{\mathbf{G}}_2(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{u}_*^{(0)}, \tilde{u}_*^{(1)}, \tilde{v}_*^{(0)}, \tilde{v}_*^{(1)})} \quad (3.9) \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^i}{dt^i} \mathcal{C}(t) \right|_{t=t_*} &= \\ &= \mathbf{G}_i(\mathbf{F}, u_*^{(0)}, \dots, u_*^{(i-1)}, v_*^{(0)}, \dots, v_*^{(i-1)}) + \mathbf{F}_{u,*} u_*^{(i)} + \mathbf{F}_{v,*} v_*^{(i)} = \\ &= \tilde{\mathbf{G}}_i(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{u}_*^{(0)}, \dots, \tilde{u}_*^{(i-1)}, \tilde{v}_*^{(0)}, \dots, \tilde{v}_*^{(i-1)}) + \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},*} \tilde{u}_*^{(i)} + \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},*} \tilde{v}_*^{(i)} \quad , \\ & i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei \mathbf{G}_i und $\tilde{\mathbf{G}}_i$ einfach zu berechnende Funktionale von \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ sind (es müssen lediglich partielle Ableitungen bestimmt werden). Sind die Werte $u_\star^{(0)}, \dots, u_\star^{(i-1)}$, $v_\star^{(0)}, \dots, v_\star^{(i-1)}$, $\tilde{u}_\star^{(0)}, \dots, \tilde{u}_\star^{(i-1)}$ und $\tilde{v}_\star^{(0)}, \dots, \tilde{v}_\star^{(i-1)}$ bekannt, bildet Gleichung (3.10) ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem (drei Gleichungen, vier Unbekannte) zur Berechnung von $u_\star^{(i)}$, $v_\star^{(i)}$, $\tilde{u}_\star^{(i)}$ und $\tilde{v}_\star^{(i)}$. Eine vierte lineare Gleichung erhält man durch entsprechend häufiges Differenzieren der Bogenlängen-Bedingung $\langle \dot{\mathcal{C}}(t), \dot{\mathcal{C}}(t) \rangle = 1$ und Einsetzen von t_\star was auf

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t), \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t) \right\rangle \Big|_{t=t_\star} &= 2 \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t), \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{C}(t) \right\rangle \Big|_{t=t_\star} = \\ &= 2 \left\{ \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t), \mathbf{G}_2(\mathbf{F}, u_\star^{(0)}, u_\star^{(1)}, v_\star^{(0)}, v_\star^{(1)}) \right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t), \mathbf{F}_{u,\star} \right\rangle u_\star^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t), \mathbf{F}_{v,\star} \right\rangle v_\star^{(2)} \right\} \Big|_{t=t_\star} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t), \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t) \right\rangle \Big|_{t=t_\star} &= H_i \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{C}(t) \Big|_{t=t_\star}, \dots, \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \mathcal{C}(t) \Big|_{t=t_\star} \right) + \\ &= 2 \left\{ \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t), \mathbf{G}_i(\mathbf{F}, u_\star^{(0)}, \dots, u_\star^{(i-1)}, v_\star^{(0)}, \dots, v_\star^{(i-1)}) \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t), \mathbf{F}_{u,\star} \right\rangle u_\star^{(i)} + \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{C}(t), \mathbf{F}_{v,\star} \right\rangle v_\star^{(i)} \right\} \Big|_{t=t_\star} = 0 \quad , \\ &i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.12)$$

führt, wobei H_i eine einfach zu berechnende Funktion ist. Die Gleichungen (3.10) und (3.12) bilden eine Folge von nacheinander zu lösenden linearen Gleichungssystemen mit den jeweils vier Unbekannten $u_\star^{(i)}$, $v_\star^{(i)}$, $\tilde{u}_\star^{(i)}$ und $\tilde{v}_\star^{(i)}$. Diese Systeme können mit numerischen Standardverfahren (zum Beispiel *Gauß*-Algorithmus mit relativer Spaltenmaximum-Strategie; siehe [Grab00]) gelöst werden. Die Matrizen der zu lösenden linearen Gleichungssysteme sind alle gleich. Sie haben die Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{u,\star} & \mathbf{F}_{v,\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

mit

$$a_{4,1} = \langle \mathbf{F}_{u,\star} u_\star^{(1)} + \mathbf{F}_{v,\star} v_\star^{(1)}, \mathbf{F}_{u,\star} \rangle$$

$$a_{4,2} = \langle \mathbf{F}_{u,\star} u_\star^{(1)} + \mathbf{F}_{v,\star} v_\star^{(1)}, \mathbf{F}_{v,\star} \rangle .$$

Die Matrix (3.13) ist unter den Voraussetzungen (V1) bis (V3) stets invertierbar.

Beweis

Für die Determinante der Matrix (3.13) gilt

$$\begin{aligned} -\det \begin{vmatrix} \mathbf{F}_{u,\star} & \mathbf{F}_{v,\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & 0 \end{vmatrix} &= \\ &= a_{4,1} \cdot \det \begin{vmatrix} \mathbf{F}_{v,\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star} \end{vmatrix} - a_{4,2} \cdot \det \begin{vmatrix} \mathbf{F}_{u,\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\langle \mathbf{T}_C(t_\star), \mathbf{F}_{u,\star} \rangle \langle \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_\star, \tilde{v}_\star), \mathbf{F}_{v,\star} \rangle - \langle \mathbf{T}_C(t_\star), \mathbf{F}_{v,\star} \rangle \langle \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_\star, \tilde{v}_\star), \mathbf{F}_{u,\star} \rangle \right) \\ &\quad \left\| \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star} \times \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star} \right\| = \\ &= \det \underbrace{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{T}_C(t_\star), \mathbf{F}_{u,\star} \rangle & \langle \mathbf{T}_C(t_\star), \mathbf{F}_{v,\star} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_\star, \tilde{v}_\star), \mathbf{F}_{u,\star} \rangle & \langle \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_\star, \tilde{v}_\star), \mathbf{F}_{v,\star} \rangle \end{vmatrix}}_{=D} \underbrace{\left\| \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star} \times \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star} \right\|}_{>0 \text{ wegen (V2)}} . \end{aligned}$$

Bei den beiden Spaltenvektoren der mit D bezeichneten Determinante handelt es sich um die senkrechten Projektionen der Vektoren $\mathbf{F}_{u,\star}$ und $\mathbf{F}_{v,\star}$ in das von den orthonormalen Vektoren $\mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_\star, \tilde{v}_\star)$ und $\mathbf{T}_C(t_\star)$ gebildete Koordinatensystem. Diese Spaltenvektoren wären genau dann linear abhängig, wenn die Normale $\mathbf{n}_{\mathbf{F}}(u_\star, v_\star) = \mathbf{F}_{u,\star} \times \mathbf{F}_{v,\star}$ in der von $\mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\tilde{u}_\star, \tilde{v}_\star)$ und $\mathbf{T}_C(t_\star)$ aufgespannten Ebene liegen würde. Dies ist aber wegen Voraussetzung (V3) niemals der Fall. Es gilt also $D \neq 0$. Daraus folgt

$$\det \begin{vmatrix} \mathbf{F}_{u,\star} & \mathbf{F}_{v,\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Die Invertierbarkeit der Matrix (3.13) ist damit gezeigt. \square

Die Ableitungen $\mathcal{C}_\star^{(i)}$ der Schnittkurve am Entwicklungspunkt t_\star erhält man durch Einsetzen von $u_\star^{(i)}$ und $v_\star^{(i)}$ oder $\tilde{u}_\star^{(i)}$ und $\tilde{v}_\star^{(i)}$ in Gleichung (3.10).

Das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der zweiten Ableitungen

Um dem Leser das Nachvollziehen und Verwenden der in diesem Unterabschnitt präsentierten Formeln zu erleichtern, wird im Folgenden das aus den Gleichungen (3.10) und (3.12) gewonnene lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der zweiten Ableitungen $u_\star^{(2)}$, $v_\star^{(2)}$, $\tilde{u}_\star^{(2)}$ und $\tilde{v}_\star^{(2)}$ explizit angegeben. Es lautet

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{u,\star} & \mathbf{F}_{v,\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\star^{(2)} \\ v_\star^{(2)} \\ \tilde{u}_\star^{(2)} \\ \tilde{v}_\star^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ b_4 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} a_{4,1} &= \left\langle \mathbf{F}_{u,\star} u_\star^{(1)} + \mathbf{F}_{v,\star} v_\star^{(1)}, \mathbf{F}_{u,\star} \right\rangle \\ a_{4,2} &= \left\langle \mathbf{F}_{u,\star} u_\star^{(1)} + \mathbf{F}_{v,\star} v_\star^{(1)}, \mathbf{F}_{v,\star} \right\rangle \\ \mathbf{b} &= - \left(\mathbf{F}_{uu,\star} \left(u_\star^{(1)} \right)^2 + 2 \mathbf{F}_{uv,\star} u_\star^{(1)} v_\star^{(1)} + \mathbf{F}_{vv,\star} \left(v_\star^{(1)} \right)^2 \right) + \\ &\quad + \left(\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u}\tilde{u},\star} \left(\tilde{u}_\star^{(1)} \right)^2 + 2 \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} \tilde{u}_\star^{(1)} \tilde{v}_\star^{(1)} + \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v}\tilde{v},\star} \left(\tilde{v}_\star^{(1)} \right)^2 \right) \\ b_4 &= - \left\langle \mathbf{F}_{u,\star} u_\star^{(1)} + \mathbf{F}_{v,\star} v_\star^{(1)}, \mathbf{F}_{uu,\star} \left(u_\star^{(1)} \right)^2 + 2 \mathbf{F}_{uv,\star} u_\star^{(1)} v_\star^{(1)} + \mathbf{F}_{vv,\star} \left(v_\star^{(1)} \right)^2 \right\rangle \end{aligned}$$

gilt.

3.3.4 Beispiel: *Taylor*-Entwicklung der Schnittkurve eines Paraboloids und einer Ebene

Im Folgenden wird noch einmal das Beispiel aus Abschnitt 3.1 aufgegriffen. Die Anwendung des eben präsentierten Verfahrens zur Berechnung der *Taylor*-Entwicklung der Schnittkurve der beiden Polynomflächen $\mathbf{F} = (u, v, -u^2 - v^2)$ und $\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, -1)$ (Abbildung 3.2) liefert für den Kurvenpunkt $(u_\star, v_\star, \tilde{u}_\star, \tilde{v}_\star) = (0, -1, 0, -1)$ und den Entwicklungspunkt $t_\star = 0$ im Parametergebiet von \mathbf{F} das Ergebnis

$$u_T(t; 0, n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} t^{2i+1} \approx \sin(t)$$

$$v_T(t; 0, n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i)!} t^{2i} \approx -\cos(t) ,$$

welches in diesem einfachen Fall auch leicht analytisch berechnet werden kann. Die Approximation $(u_T(t; 0, n), v_T(t; 0, n))$ ist für verschiedene Grade n in Abbildung 3.3 dargestellt. Es ist gut zu erkennen, dass mit steigendem n der tatsächliche Verlauf der Schnittkurve immer besser angenommen wird.

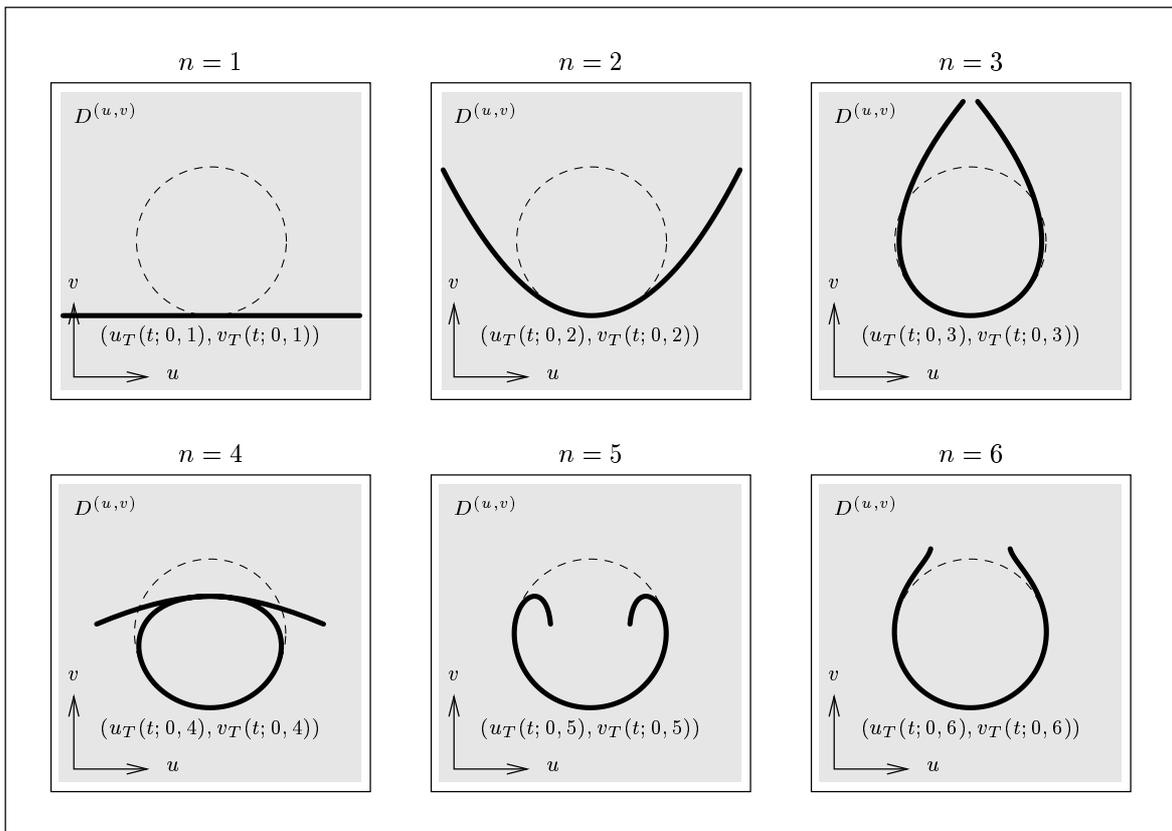


Abbildung 3.3: Die *Taylor*-Entwicklungen der Schnittkurve für verschiedene Grade n

3.4 Berechnen einzelner Punkte auf den Schnittkurven

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie ein Punkt $(u_*, v_*, \tilde{u}_*, \tilde{v}_*)$ auf der Schnittkurve zweier B-Spline-Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ in Parameterdarstellung in beiden Parametergebieten berechnet werden kann. Voraussetzung dafür ist die Kenntnis einer hinreichend guten Näherung $(u_0, v_0, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ für diesen Punkt. Auch in diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ die Voraussetzungen (V1) bis (V3) erfüllen (Abschnitt 3.2).

3.4.1 Aufstellen nicht-linearer Gleichungssysteme

Zu einer gegebenen Näherung $(u_0, v_0, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ soll ein Punkt $(u_*, v_*, \tilde{u}_*, \tilde{v}_*)$ bestimmt werden, der einerseits möglichst nahe an dieser Näherung liegt, andererseits Element der Schnittkurve der beiden B-Spline-Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ ist. Zu diesem Zweck wird das Minimum der Funktion

$$f(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}) = (\mathbf{F}(u, v) - \mathbf{F}(u_0, v_0))^2 + (\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}, \tilde{v}) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))^2 \quad (3.14)$$

unter den drei Nebenbedingungen

$$\mathbf{g}(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{F}(u, v) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0 \quad (3.15)$$

berechnet. Dies erfordert die Lösung des im Folgenden mit $\mathbf{h}(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ bezeichneten nicht-linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{g}(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}) = 0 \quad (3.16)$$

$$\mathbf{grad} f(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}) - \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{grad} g_i(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}) = 0 \quad (3.17)$$

mit den drei *Lagrange*-Multiplikatoren λ_1, λ_2 und λ_3 . Einsetzen der Gleichungen (3.14) und (3.15) in (3.16) und (3.17) liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 - \tilde{\mathbf{F}}_1 &= 0 \\ \mathbf{F}_2 - \tilde{\mathbf{F}}_2 &= 0 \\ \mathbf{F}_3 - \tilde{\mathbf{F}}_3 &= 0 \\ 2 \langle \mathbf{F} - \mathbf{F}_0, \mathbf{F}_u \rangle - (\lambda_1 \mathbf{F}_{1,u} + \lambda_2 \mathbf{F}_{2,u} + \lambda_3 \mathbf{F}_{3,u}) &= 0 \\ 2 \langle \mathbf{F} - \mathbf{F}_0, \mathbf{F}_v \rangle - (\lambda_1 \mathbf{F}_{1,v} + \lambda_2 \mathbf{F}_{2,v} + \lambda_3 \mathbf{F}_{3,v}) &= 0 \\ 2 \langle \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}_0, \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u}} \rangle + (\lambda_1 \tilde{\mathbf{F}}_{1,\tilde{u}} + \lambda_2 \tilde{\mathbf{F}}_{2,\tilde{u}} + \lambda_3 \tilde{\mathbf{F}}_{3,\tilde{u}}) &= 0 \\ 2 \langle \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}_0, \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v}} \rangle + (\lambda_1 \tilde{\mathbf{F}}_{1,\tilde{v}} + \lambda_2 \tilde{\mathbf{F}}_{2,\tilde{v}} + \lambda_3 \tilde{\mathbf{F}}_{3,\tilde{v}}) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Um ein Extremum $(u_*, v_*, \tilde{u}_*, \tilde{v}_*)$ einer Funktion $f(u, v, \tilde{u}, \tilde{v})$ unter den Nebenbedingungen $g_i(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}) = 0$ mit der Methode der *Lagrange*-Multiplikatoren ermitteln zu können, müssen die Vektoren $\mathbf{grad} g_i(u, v, \tilde{u}, \tilde{v})$ in diesem Extremum linear unabhängig sein (siehe [Grab98b]).

Dies ist unter Voraussetzung (V3) stets der Fall.

Beweis

Es gilt

$$\mathbf{grad} g_i(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}) \Big|_{(u,v,\tilde{u},\tilde{v})=(u_*,v_*,\tilde{u}_*,\tilde{v}_*)} = \begin{pmatrix} F_{i,u,*} \\ F_{i,v,*} \\ -\tilde{F}_{i,\tilde{u},*} \\ -\tilde{F}_{i,\tilde{v},*} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad .$$

Es folgt

$$\begin{pmatrix} F_{1,u,*} \\ F_{1,v,*} \\ -\tilde{F}_{1,\tilde{u},*} \\ -\tilde{F}_{1,\tilde{v},*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{2,u,*} \\ F_{2,v,*} \\ -\tilde{F}_{2,\tilde{u},*} \\ -\tilde{F}_{2,\tilde{v},*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{3,u,*} \\ F_{3,v,*} \\ -\tilde{F}_{3,\tilde{u},*} \\ -\tilde{F}_{3,\tilde{v},*} \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig} \iff$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} F_{1,u,*} & F_{2,u,*} & F_{3,u,*} \\ F_{1,v,*} & F_{2,v,*} & F_{3,v,*} \\ -\tilde{F}_{1,\tilde{u},*} & -\tilde{F}_{2,\tilde{u},*} & -\tilde{F}_{3,\tilde{u},*} \\ -\tilde{F}_{1,\tilde{v},*} & -\tilde{F}_{2,\tilde{v},*} & -\tilde{F}_{3,\tilde{v},*} \end{pmatrix} = 3 \iff$$

$$\begin{pmatrix} F_{1,u,*} \\ F_{2,u,*} \\ \tilde{F}_{3,u,*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{1,v,*} \\ F_{2,v,*} \\ \tilde{F}_{3,v,*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\tilde{F}_{1,\tilde{u},*} \\ -\tilde{F}_{2,\tilde{u},*} \\ -\tilde{F}_{3,\tilde{u},*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\tilde{F}_{1,\tilde{v},*} \\ -\tilde{F}_{2,\tilde{v},*} \\ -\tilde{F}_{3,\tilde{v},*} \end{pmatrix} \text{ spannen den } \mathbb{R}^3 \text{ auf} \iff$$

Voraussetzung (V3) ist erfüllt .

□

Sonderfall: Die Endpunkte der Schnittkurve

Um einen der Endpunkte der Schnittkurve der beiden Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ in Parameterdarstellung zu ermitteln, wird einer der vier Parameter u , v , \tilde{u} oder \tilde{v} auf seinen minimal oder maximal zulässigen Wert gesetzt und festgehalten. Welcher der Parameter konstant gehalten wird, und ob dabei der minimal oder maximal zulässige Wert zu wählen ist, wird ausführlich in Abschnitt 3.5.1 erläutert. Das von den Gleichungen 3.16 und 3.17 gebildete Gleichungssystem $\mathbf{h}(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ wird dann durch eines der nicht-linearen Systeme

$$\mathbf{h}(v, \tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{F}(u = \text{konstant}, v) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0 \quad (3.18)$$

$$\mathbf{h}(u, \tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{F}(u, v = \text{konstant}) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0 \quad (3.19)$$

$$\mathbf{h}(u, v, \tilde{v}) = \mathbf{F}(u, v) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u} = \text{konstant}, \tilde{v}) = 0 \quad (3.20)$$

$$\mathbf{h}(u, v, \tilde{u}) = \mathbf{F}(u, v) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}, \tilde{v} = \text{konstant}) = 0 \quad (3.21)$$

ersetzt. Es wird also der Schnittpunkt einer der beiden Flächen mit einer der Randkurven der anderen Fläche berechnet.

3.4.2 Lösen der nicht-linearen Gleichungssysteme

Zur numerischen Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems $\mathbf{h}(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, bestehend aus den Gleichungen (3.16) und (3.17), wird das *Newton*-Verfahren

$$(u_{i+1}, \dots, \lambda_{3,i+1}) = (u_i, \dots, \lambda_{3,i}) - (\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(u_i, \dots, \lambda_{3,i}))^{-1} \mathbf{h}(u_i, \dots, \lambda_{3,i}) \quad (3.22)$$

verwendet (siehe [Grab00]). $\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, die *Jacobi*-Matrix der Funktion $\mathbf{h}(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, hat die Form

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} F_{1,u} & F_{1,v} & -\tilde{F}_{1,\tilde{u}} & -\tilde{F}_{1,\tilde{v}} & 0 & 0 & 0 \\ F_{2,u} & F_{2,v} & -\tilde{F}_{2,\tilde{u}} & -\tilde{F}_{2,\tilde{v}} & 0 & 0 & 0 \\ F_{3,u} & F_{3,v} & -\tilde{F}_{3,\tilde{u}} & -\tilde{F}_{3,\tilde{v}} & 0 & 0 & 0 \\ A_{uu} & A_{uv} & 0 & 0 & -F_{1,u} & -F_{2,u} & -F_{3,u} \\ A_{uv} & A_{vv} & 0 & 0 & -F_{1,v} & -F_{2,v} & -F_{3,v} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{u}} & \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v}} & \tilde{F}_{1,\tilde{u}} & \tilde{F}_{2,\tilde{u}} & \tilde{F}_{3,\tilde{u}} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v}} & \tilde{A}_{\tilde{v}\tilde{v}} & \tilde{F}_{1,\tilde{v}} & \tilde{F}_{2,\tilde{v}} & \tilde{F}_{3,\tilde{v}} \end{pmatrix},$$

wobei

$$A_{\alpha\beta} = 2(\langle \mathbf{F}_{\alpha}, \mathbf{F}_{\beta} \rangle + \langle \mathbf{F} - \mathbf{F}_0, \mathbf{F}_{\alpha\beta} \rangle) - (\lambda_1 F_{1,\alpha\beta} + \lambda_2 F_{2,\alpha\beta} + \lambda_3 F_{3,\alpha\beta})$$

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = 2(\langle \tilde{\mathbf{F}}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{F}}_{\beta} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}_0, \tilde{\mathbf{F}}_{\alpha\beta} \rangle) + (\lambda_1 \tilde{F}_{1,\alpha\beta} + \lambda_2 \tilde{F}_{2,\alpha\beta} + \lambda_3 \tilde{F}_{3,\alpha\beta})$$

gilt. Als Startwert für das *Newton*-Verfahren wird die gegebene Näherung $(u_0, v_0, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ und die beste Lösung $(\lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}, \lambda_{3,0})$ des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{grad} f(u_0, v_0, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = \sum_{i=1}^3 \lambda_{i,0} \mathbf{grad} g_i(u_0, v_0, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$$

gewählt. Dieses System geht durch Einsetzen von $(u_0, v_0, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ aus Gleichungssystem (3.17) hervor. Weitere Rechnung liefert

$$\begin{pmatrix} -F_{1,u,0} & -F_{2,u,0} & -F_{3,u,0} \\ -F_{1,v,0} & -F_{2,v,0} & -F_{3,v,0} \\ F_{1,\tilde{u},0} & F_{2,\tilde{u},0} & F_{3,\tilde{u},0} \\ F_{1,\tilde{v},0} & F_{2,\tilde{v},0} & F_{3,\tilde{v},0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1,0} \\ \lambda_{2,0} \\ \lambda_{3,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Es ist sofort ersichtlich, dass die gesuchte beste und sogar exakte Lösung $(\lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}, \lambda_{3,0}) = (0, 0, 0)$ ist.

Wird der zulässige Parameterbereich von \mathbf{F} oder $\tilde{\mathbf{F}}$ bei einem Iterationsschritt verlassen, wird der oder werden die entsprechenden Parameter u , v , \tilde{u} oder \tilde{v} auf extremal zulässige Werte gesetzt. Schließlich sind nur Lösungen von Interesse, die innerhalb beider Parametergebiete liegen.

Das *Newton*-Verfahren wird abgebrochen, sobald

$$\left\| \mathbf{F}(u_i, v_i) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) \right\|_1 < \varepsilon$$

erfüllt ist. ε ist eine vom Benutzer vorzugebende Konstante, mit der die Genauigkeit der Schnittkurven-Approximation gesteuert werden kann.

Konvergenz des *Newton*-Verfahrens

Das *Newton*-Verfahren (3.22) konvergiert immer, sofern $\mathbf{J}_h(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ invertierbar und der Startvektor $(u_0, v_0, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}, \lambda_{3,0})$ eine hinreichend genaue Näherung der gesuchten Nullstelle $(u_*, v_*, \tilde{u}_*, \tilde{v}_*, \lambda_{1,*}, \lambda_{2,*}, \lambda_{3,*})$ ist (siehe [Grab00]).

Wie bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt, ergibt sich der Näherungswert $(u_0, v_0, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ durch *Taylor*-Entwicklung der Schnittkurve in beiden Parametergebieten um den letzten bekannten Punkt $(u_{*,\text{alt}}, v_{*,\text{alt}}, \tilde{u}_{*,\text{alt}}, \tilde{v}_{*,\text{alt}})$ (diesem sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Parameterwert $t = 0$ zugeordnet) und Einsetzen einer kleinen Schrittweite Δt . Bei linearer Näherung (Grad $n = 1$) gilt

$$u(\Delta t) = \underbrace{u_{*,\text{alt}}^{(0)} + u_{*,\text{alt}}^{(1)} \Delta t}_{=u_0} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad ,$$

woraus $u_0 = u_* + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ für kleine Δt folgt. Analog erhält man $v_0 = v_* + \mathcal{O}(\Delta t^2)$, $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_* + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ und $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_* + \mathcal{O}(\Delta t^2)$. Einsetzen dieser Beziehungen in die beiden B-Spline-

Flächen liefert $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_\star + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ und $\tilde{\mathbf{F}}_0 = \tilde{\mathbf{F}}_\star + \mathcal{O}(\Delta t^2)$. Ausnutzen dieser Gleichungen in (3.17) führt auf $\lambda_{1,0} = 0 = \lambda_{1,\star} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$, $\lambda_{2,0} = 0 = \lambda_{2,\star} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ und $\lambda_{3,0} = 0 = \lambda_{3,\star} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$. Das Voranschreiten auf der gesuchten Trimming-Kurve ist also ein Effekt erster Ordnung, während die Abweichung des Startwertes von der gesuchten Lösung ein Effekt zweiter Ordnung für lineare *Taylor*-Entwicklung oder noch höherer Ordnung für $n \geq 2$ ist. Das bedeutet, als Startwert kann durch entsprechend kleine Wahl der Schrittweite Δt eine beliebig gute Näherung der gesuchten Nullstelle erzeugt werden. Dabei ist der Abstand zum letzten bekannten Kurvenpunkt $(u_{\star,\text{alt}}, v_{\star,\text{alt}}, \tilde{u}_{\star,\text{alt}}, \tilde{v}_{\star,\text{alt}})$ gegenüber dieser kleinen Abweichung bei kleinem Δt dominierend.

In einfachen Worten zusammengefasst bedeutet das: Konvergiert das *Newton*-Verfahren nicht weil der Startwert zu weit vom gesuchten Kurvenpunkt entfernt liegt, wird das Iterationsverfahren erneut gestartet. Der neue Startwert wird mit kleinerer Schrittweite Δt erzeugt. Auf diese Weise erhält man in jedem Fall irgendwann eine ausreichend gute Näherung der gesuchten Lösung, für die das *Newton*-Verfahren konvergiert.

Wird die Schrittweite Δt klein genug gewählt, existiert eine Umgebung der gesuchten Lösung $(u_\star, v_\star, \tilde{u}_\star, \tilde{v}_\star, \lambda_{1,\star}, \lambda_{2,\star}, \lambda_{3,\star})$ in der $\mathbf{J}_\mathbf{h}$ invertierbar ist.

Beweis

Nach Voraussetzung (V3) bilden drei der vier Vektoren $\mathbf{F}_{u,\star}$, $\mathbf{F}_{v,\star}$, $\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star}$ und $\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 . Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathbf{F}_{u,\star}$, $\mathbf{F}_{v,\star}$ und $\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star}$ diese Vektoren. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen a , b und c für die $a\mathbf{F}_{u,\star} + b\mathbf{F}_{v,\star} - c\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star} = \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star}$ gilt.

Zuerst wird gezeigt, dass die Matrix

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h},\star} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{1,u,\star} & \mathbf{F}_{1,v,\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{1,\tilde{u},\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{1,\tilde{v},\star} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{F}_{2,u,\star} & \mathbf{F}_{2,v,\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{2,\tilde{u},\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{2,\tilde{v},\star} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{F}_{3,u,\star} & \mathbf{F}_{3,v,\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{3,\tilde{u},\star} & -\tilde{\mathbf{F}}_{3,\tilde{v},\star} & 0 & 0 & 0 \\ A_{uu,\star} & A_{uv,\star} & 0 & 0 & -\mathbf{F}_{1,u,\star} & -\mathbf{F}_{2,u,\star} & -\mathbf{F}_{3,u,\star} \\ A_{uv,\star} & A_{vv,\star} & 0 & 0 & -\mathbf{F}_{1,v,\star} & -\mathbf{F}_{2,v,\star} & -\mathbf{F}_{3,v,\star} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{u},\star} & \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} & \tilde{\mathbf{F}}_{1,\tilde{u},\star} & \tilde{\mathbf{F}}_{2,\tilde{u},\star} & \tilde{\mathbf{F}}_{3,\tilde{u},\star} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} & \tilde{A}_{\tilde{v}\tilde{v},\star} & \tilde{\mathbf{F}}_{1,\tilde{v},\star} & \tilde{\mathbf{F}}_{2,\tilde{v},\star} & \tilde{\mathbf{F}}_{3,\tilde{v},\star} \end{pmatrix}$$

bei hinreichend kleiner Schrittweite Δt invertierbar ist. Der *Gauß*-Algorithmus für Spalten ändert nichts an der Invertierbarkeit einer Matrix. Er führt auf

$$\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{h},\star} = \begin{pmatrix} F_{1,u,\star} & F_{1,v,\star} & -\tilde{F}_{1,\tilde{u},\star} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{2,u,\star} & F_{2,v,\star} & -\tilde{F}_{2,\tilde{u},\star} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{3,u,\star} & F_{3,v,\star} & -\tilde{F}_{3,\tilde{u},\star} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{uu,\star} & A_{uv,\star} & 0 & a A_{uu,\star} + b A_{uv,\star} & -F_{1,u,\star} & -F_{2,u,\star} & -F_{3,u,\star} \\ A_{uv,\star} & A_{vv,\star} & 0 & a A_{uv,\star} + b A_{vv,\star} & -F_{1,v,\star} & -F_{2,v,\star} & -F_{3,v,\star} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{u},\star} & c \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{u},\star} + \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{1,\tilde{u},\star} & \tilde{F}_{2,\tilde{u},\star} & \tilde{F}_{3,\tilde{u},\star} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} & c \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} + \tilde{A}_{\tilde{v}\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{1,\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{2,\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{3,\tilde{v},\star} \end{pmatrix} .$$

Für die Determinante von $\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{h},\star}$ gilt

$$\det(\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{h},\star}) = \det \underbrace{\begin{vmatrix} F_{1,u,\star} & F_{1,v,\star} & -\tilde{F}_{1,\tilde{u},\star} \\ F_{2,u,\star} & F_{2,v,\star} & -\tilde{F}_{2,\tilde{u},\star} \\ F_{3,u,\star} & F_{3,v,\star} & -\tilde{F}_{3,\tilde{u},\star} \end{vmatrix}}_{\neq 0} \cdot \det \begin{vmatrix} a A_{uu,\star} + b A_{uv,\star} & -F_{1,u,\star} & -F_{2,u,\star} & -F_{3,u,\star} \\ a A_{uv,\star} + b A_{vv,\star} & -F_{1,v,\star} & -F_{2,v,\star} & -F_{3,v,\star} \\ c \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{u},\star} + \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{1,\tilde{u},\star} & \tilde{F}_{2,\tilde{u},\star} & \tilde{F}_{3,\tilde{u},\star} \\ c \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} + \tilde{A}_{\tilde{v}\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{1,\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{2,\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{3,\tilde{v},\star} \end{vmatrix} .$$

Zu zeigen ist also nur noch die Invertierbarkeit der Matrix

$$\check{\mathbf{J}}_{\mathbf{h},\star} = \begin{pmatrix} a A_{uu,\star} + b A_{uv,\star} & -F_{1,u,\star} & -F_{2,u,\star} & -F_{3,u,\star} \\ a A_{uv,\star} + b A_{vv,\star} & -F_{1,v,\star} & -F_{2,v,\star} & -F_{3,v,\star} \\ c \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{u},\star} + \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{1,\tilde{u},\star} & \tilde{F}_{2,\tilde{u},\star} & \tilde{F}_{3,\tilde{u},\star} \\ c \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} + \tilde{A}_{\tilde{v}\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{1,\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{2,\tilde{v},\star} & \tilde{F}_{3,\tilde{v},\star} \end{pmatrix} .$$

Anwenden des *Gauß*-Algorithmus für Zeilen (die Matrix wird auf Stufenform gebracht, um die Regularität zu untersuchen) liefert die Aussage

$$\begin{aligned} & \left(a (a A_{uu,\star} + b A_{uv,\star}) + b (a A_{uv,\star} + b A_{vv,\star}) + c (c \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{u},\star} + \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star}) + \right. \\ & \left. c \tilde{A}_{\tilde{u}\tilde{v},\star} + \tilde{A}_{\tilde{v}\tilde{v},\star} \neq 0 \right) \iff \check{\mathbf{J}}_{\mathbf{h},\star} \text{ ist invertierbar} . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Für $A_{\alpha\alpha,\star}$ und $\tilde{A}_{\alpha\alpha,\star}$ erhält man durch Ausnutzen der weiter oben aufgestellten Beziehungen $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_\star + \mathcal{O}(\Delta t^2)$, $\tilde{\mathbf{F}}_0 = \tilde{\mathbf{F}}_\star + \mathcal{O}(\Delta t^2)$, $\lambda_{1,0} = 0 = \lambda_{1,\star} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$, $\lambda_{2,0} = 0 = \lambda_{2,\star} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ und $\lambda_{3,0} = 0 = \lambda_{3,\star} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$

$$\begin{aligned} A_{\alpha\alpha,\star} &= 2 \langle \mathbf{F}_{\alpha,\star}, \mathbf{F}_{\alpha,\star} \rangle + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ \tilde{A}_{\alpha\alpha,\star} &= 2 \langle \tilde{\mathbf{F}}_{\alpha,\star}, \tilde{\mathbf{F}}_{\alpha,\star} \rangle + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad . \end{aligned}$$

Einsetzen in Aussage (3.23) führt zu

$$\underbrace{\left(2(a \mathbf{F}_{u,\star} + b \mathbf{F}_{v,\star})^2 + 2(c \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},\star} + \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},\star})^2 \right)}_{>0} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \neq 0 \quad \longleftrightarrow$$

$\check{\mathbf{J}}_{\mathbf{h},\star}$ ist invertierbar .

Wird Δt entsprechend klein gewählt, ist die Matrix $\check{\mathbf{J}}_{\mathbf{h},\star}$ und damit auch $\mathbf{J}_{\mathbf{h},\star}$ invertierbar.

Da es sich bei den Matrixelementen von $\mathbf{J}_{\mathbf{h}}$ um stetige Funktionen handelt, erstreckt sich die Invertierbarkeit auf eine Umgebung von $(u_\star, v_\star, \tilde{u}_\star, \tilde{v}_\star, \lambda_{1,\star}, \lambda_{2,\star}, \lambda_{3,\star})$. \square

In einfachen Worten zusammengefasst bedeutet das: Konvergiert das *Newton*-Verfahren nicht weil die Matrix $\mathbf{J}_{\mathbf{h}}$ nicht invertierbar ist, wird das Iterationsverfahren erneut gestartet. Der neue Startwert wird mit kleinerer Schrittweite Δt erzeugt. Auf diese Weise gelangt man in jedem Fall irgendwann in eine Umgebung der gesuchten Lösung, in der $\mathbf{J}_{\mathbf{h}}$ invertierbar ist.

Sonderfall: Die Endpunkte der Schnittkurve

Auch hier wird das *Newton*-Verfahren zur Lösung eines der nicht-linearen Gleichungssysteme (3.18), (3.19), (3.20) oder (3.21) verwendet. Die dazugehörigen *Jacobi*-Matrizen $\mathbf{J}_{\mathbf{h}}$ haben die Form

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(v, \tilde{u}, \tilde{v}) = \begin{pmatrix} F_{1,v} & -\tilde{F}_{1,\tilde{u}} & -\tilde{F}_{1,\tilde{v}} \\ F_{2,v} & -\tilde{F}_{2,\tilde{u}} & -\tilde{F}_{2,\tilde{v}} \\ F_{3,v} & -\tilde{F}_{3,\tilde{u}} & -\tilde{F}_{3,\tilde{v}} \end{pmatrix} \quad (\text{Jacobi-Matrix zu Gleichungssystem (3.18)})$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(u, \tilde{u}, \tilde{v}) = \begin{pmatrix} F_{1,u} & -\tilde{F}_{1,\tilde{u}} & -\tilde{F}_{1,\tilde{v}} \\ F_{2,u} & -\tilde{F}_{2,\tilde{u}} & -\tilde{F}_{2,\tilde{v}} \\ F_{3,u} & -\tilde{F}_{3,\tilde{u}} & -\tilde{F}_{3,\tilde{v}} \end{pmatrix} \quad (\text{Jacobi-Matrix zu Gleichungssystem (3.19)})$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(u, v, \tilde{v}) = \begin{pmatrix} F_{1,u} & F_{1,v} & -\tilde{F}_{1,\tilde{v}} \\ F_{2,u} & F_{2,v} & -\tilde{F}_{2,\tilde{v}} \\ F_{3,u} & F_{3,v} & -\tilde{F}_{3,\tilde{v}} \end{pmatrix} \quad (\text{Jacobi-Matrix zu Gleichungssystem (3.20)})$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(u, v, \tilde{u}) = \begin{pmatrix} F_{1,u} & F_{1,v} & -\tilde{F}_{1,\tilde{u}} \\ F_{2,u} & F_{2,v} & -\tilde{F}_{2,\tilde{u}} \\ F_{3,u} & F_{3,v} & -\tilde{F}_{3,\tilde{u}} \end{pmatrix} \quad (\text{Jacobi-Matrix zu Gleichungssystem (3.21)}) \quad .$$

Vorausgesetzt es handelt sich bei der gesuchten Lösung um einen echten Schnitt und nicht nur um einen Berührungspunkt, gelten bezüglich der Konvergenz des *Newton*-Verfahrens bei diesen Gleichungssystemen ebenfalls die weiter oben getroffenen Aussagen.

3.4.3 Beispiel: Berechnen eines inneren Punktes und eines Randpunktes einer Schnittkurve

Um die Wirkungen des aus den Gleichungen (3.16) und (3.17) gebildeten Systems und der Gleichungssysteme (3.18) bis (3.21) zu verdeutlichen, wurde sowohl ein innerer Punkt als auch ein Endpunkt der Schnittkurve der in Abbildung 3.4 gezeigten Flächen berechnet.

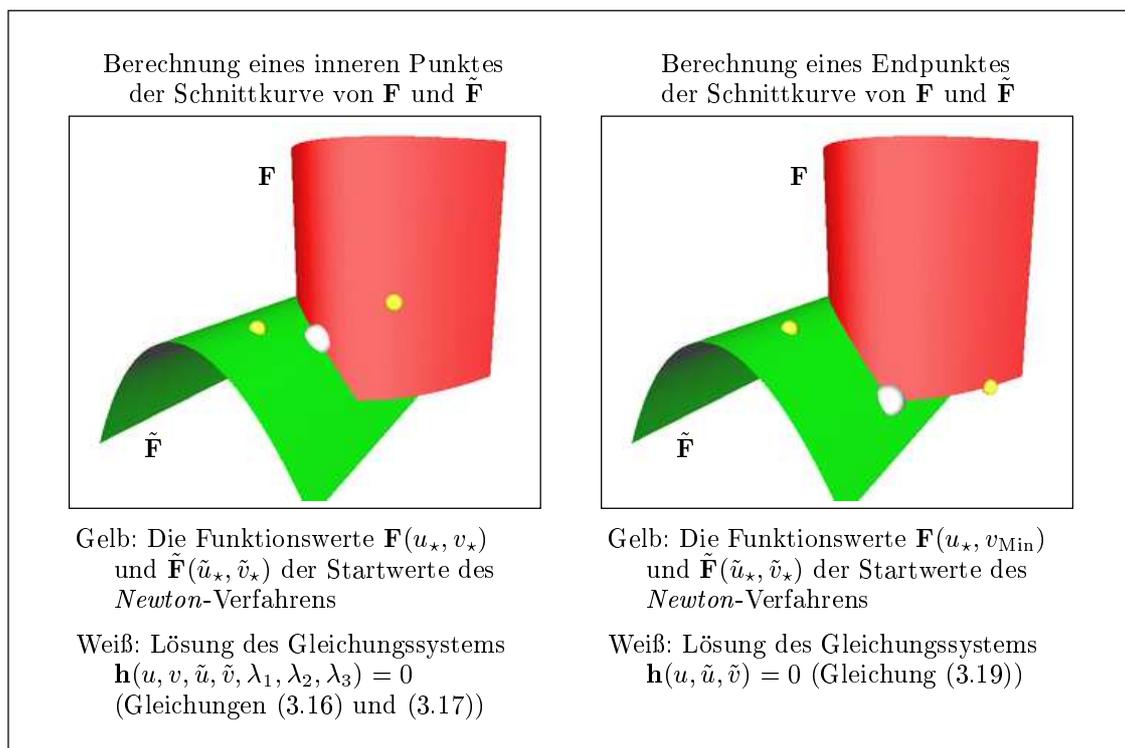


Abbildung 3.4: Berechnung eines inneren Punktes und eines Endpunktes einer Schnittkurve

Im linken Teil von Abbildung 3.4 ist schön zu sehen, dass bei Wahl der durch gelbe Kugeln markierten Startwerte ein Kurvenpunkt (weiße Kugel) berechnet wurde, der relativ nah an beiden Startwerten liegt (die Summe der quadratischen Abstände ist minimal).

Im rechten Teil von Abbildung 3.4 spielen die Startwerte eine untergeordnete Rolle. Es wird der Schnitt der unteren Randkurve von \mathbf{F} mit der Fläche $\tilde{\mathbf{F}}$ berechnet.

3.5 Approximieren der Schnittkurven durch stückweise Polynome

Die im Folgenden berechneten Approximationen der Parameterdarstellungen der Schnittkurven finden später als Trimming-Kurven Verwendung und werden daher in diesem Abschnitt bereits häufig als solche bezeichnet.

3.5.1 Berechnen von Punktfolgen auf den Schnittkurven

Durch die in den vorangehenden Abschnitten beschriebenen Techniken ist es nun möglich, eine Folge von Punkten auf einer der Schnittkurven zweier B-Spline-Flächen zu berechnen. Voraussetzung dafür ist die Kenntnis der Parameterdarstellung eines Punktes $(u_\star^{\alpha,(0)}, v_\star^{\alpha,(0)}, \tilde{u}_\star^{\alpha,(0)}, \tilde{v}_\star^{\alpha,(0)})$ auf dieser Schnittkurve. Wie in Abschnitt 3.3 erläutert können die *Taylor*-Entwicklungen der Parameterdarstellungen der nach Bogenlänge parametrisierten Schnittkurve an diesem Punkt berechnet werden.

Mit Hilfe dieser *Taylor*-Entwicklungen wird die Schnittkurve näherungsweise in beide Richtungen um eine vom Benutzer vorzugebende Schrittweite Δt verfolgt. Die beiden dadurch gewonnenen Näherungswerte $(u_0^{\alpha-1,(0)}, v_0^{\alpha-1,(0)}, \tilde{u}_0^{\alpha-1,(0)}, \tilde{v}_0^{\alpha-1,(0)})$ und $(u_0^{\alpha+1,(0)}, v_0^{\alpha+1,(0)}, \tilde{u}_0^{\alpha+1,(0)}, \tilde{v}_0^{\alpha+1,(0)})$ dienen als Startwerte für das in Abschnitt 3.4 beschriebene *Newton*-Verfahren. Die Funktionswerte dieser Startwerte liegen wegen der näherungsweisen Bogenlängen-Parametrisierung der *Taylor*-Entwicklungen etwa Δt vom letzten bekannten Kurvenpunkt $\mathbf{F}(u_\star^{\alpha,(0)}, v_\star^{\alpha,(0)})$ entfernt. Durch die Schrittweite Δt kann der Benutzer also den Abstand der Punkte der zu berechnenden Punktfolge steuern. Anwenden des *Newton*-Verfahrens führt zu zwei weiteren Kurvenpunkten $(u_\star^{\alpha-1,(0)}, v_\star^{\alpha-1,(0)}, \tilde{u}_\star^{\alpha-1,(0)}, \tilde{v}_\star^{\alpha-1,(0)})$ und $(u_\star^{\alpha+1,(0)}, v_\star^{\alpha+1,(0)}, \tilde{u}_\star^{\alpha+1,(0)}, \tilde{v}_\star^{\alpha+1,(0)})$. Konvergiert das *Newton*-Verfahren nicht, wird die Schrittweite Δt halbiert, mit dieser aktualisierten Schrittweite ein neuer Startwert berechnet und das Iterationsverfahren erneut gestartet.

Wiederholte Anwendung dieser beiden Schritte liefert eine Folge von Punkten $[(u_\star^{\alpha,(0)}, v_\star^{\alpha,(0)}, \tilde{u}_\star^{\alpha,(0)}, \tilde{v}_\star^{\alpha,(0)})]_{\alpha=0,\dots,N}$ auf der Schnittkurve wobei Dank der berechneten *Taylor*-Entwicklungen auch die ersten bis n -ten Ableitungen $(u_\star^{\alpha,(1)}, v_\star^{\alpha,(1)}, \tilde{u}_\star^{\alpha,(1)}, \tilde{v}_\star^{\alpha,(1)}), \dots, (u_\star^{\alpha,(n)}, v_\star^{\alpha,(n)}, \tilde{u}_\star^{\alpha,(n)}, \tilde{v}_\star^{\alpha,(n)})$ an diesen Punkten bekannt sind.

Sonderfall: Ein Schätzwert liegt außerhalb des Parametergebiets

Liegt ein durch *Taylor*-Entwicklung um den Kurvenpunkt $(u_\star^{\alpha,(0)}, v_\star^{\alpha,(0)}, \tilde{u}_\star^{\alpha,(0)}, \tilde{v}_\star^{\alpha,(0)})$ gewonnener Schätzwert $(u_0^{\alpha+1,(0)}, v_0^{\alpha+1,(0)}, \tilde{u}_0^{\alpha+1,(0)}, \tilde{v}_0^{\alpha+1,(0)})$ außerhalb mindestens eines der bei-

den Parametergebiete der B-Spline-Flächen, das heißt $(u_0^{\alpha+1,(0)}, v_0^{\alpha+1,(0)}, \tilde{u}_0^{\alpha+1,(0)}, \tilde{v}_0^{\alpha+1,(0)}) \notin D^{(u,v)} \times D^{(\tilde{u},\tilde{v})}$, wird nach folgender Liste vorgegangen (Entsprechendes gilt natürlich auch für die Schätzwerte $(u_0^{\alpha-1,(0)}, v_0^{\alpha-1,(0)}, \tilde{u}_0^{\alpha-1,(0)}, \tilde{v}_0^{\alpha-1,(0)})$):

- Da es sich bei dem nun zu berechnenden Kurvenpunkt höchstwahrscheinlich um einen der beiden Endpunkte handelt, wird der Schätzwert $(u_0^{\alpha+1,(0)}, v_0^{\alpha+1,(0)}, \tilde{u}_0^{\alpha+1,(0)}, \tilde{v}_0^{\alpha+1,(0)})$ so korrigiert, dass er auf dem Rand von $D^{(u,v)} \times D^{(\tilde{u},\tilde{v})}$ liegt. Dazu wird die berechnete *Taylor*-Entwicklung auf eine Entwicklung erster Ordnung reduziert (es handelt sich dann um eine Gerade). Mit Standard-Line-Clipping-Verfahren, zum Beispiel ein vereinfachtes *Cohen-Sutherland-Line-Clipping* (siehe [GrNe01]), kann die maximale Schrittweite Δt berechnet werden, für die der Schätzwert gerade nicht mehr außerhalb der Parametergebiete liegt. Abhängig davon, welcher der Werte $u_0^{\alpha+1,(0)}, v_0^{\alpha+1,(0)}, \tilde{u}_0^{\alpha+1,(0)}$ oder $\tilde{v}_0^{\alpha+1,(0)}$ seinen minimalen oder maximalen Wert annimmt, wird an Stelle des von den Gleichungen 3.16 und 3.17 gebildeten Systems eines der Gleichungssysteme 3.18 bis 3.21 verwendet.
- Liegt die mit dem *Newton*-Verfahren bestimmte Lösung des nun verwendeten Gleichungssystems außerhalb der Parametergebiete bedeutet das wahrscheinlich, dass die eben betrachtete Randkurve der einen Fläche die andere Fläche nicht schneidet. Dies liegt vermutlich daran, dass der durch Line-Clipping gewonnene Schätzwert mindestens zwei Komponenten besitzt, die in der Nähe ihrer minimalen oder maximalen Werte liegen. Die Verwendung eines der drei verbleibenden Systeme der von 3.18 bis 3.21 gebildeten Menge von Gleichungssystemen führt häufig zum Erfolg.
- Konnte noch immer keine Lösung innerhalb der Parametergebiete ermittelt werden oder liegt diese Lösung sehr weit vom letzten bekannten Kurvenpunkt $(u_\star^{\alpha,(0)}, v_\star^{\alpha,(0)}, \tilde{u}_\star^{\alpha,(0)}, \tilde{v}_\star^{\alpha,(0)})$ entfernt (Kriterium: der Abstand im \mathbb{R}^3 ist größer als $2\Delta t$; es wurde zwar ein Schnitt einer Randkurve der einen Fläche mit der anderen Fläche gefunden aber dieser Punkt ist keine sinnvolle Fortsetzung der Punktfolge), war die Näherung in Form der berechneten *Taylor*-Entwicklung offensichtlich zu schlecht. Die Schrittweite Δt wird halbiert und mit ihr ein neuer Startwert für das *Newton*-Verfahren berechnet.

Abbildung 3.5 zeigt ein Beispiel einer berechneten Punktfolge sowohl im \mathbb{R}^3 als auch in den Parametergebieten beider Flächen.

3.5.2 Interpolieren der Punktfolgen durch stückweise Polynome

Wurde eine Folge von Punkten $[(u_\star^{\alpha,(0)}, v_\star^{\alpha,(0)}, \tilde{u}_\star^{\alpha,(0)}, \tilde{v}_\star^{\alpha,(0)})]_{\alpha=0,\dots,N}$ auf der Schnittkurve zweier B-Spline-Flächen \mathbf{F} und $\bar{\mathbf{F}}$ und die ersten bis n -ten Ableitungen $(u_\star^{\alpha,(1)}, v_\star^{\alpha,(1)}, \tilde{u}_\star^{\alpha,(1)}, \tilde{v}_\star^{\alpha,(1)}), \dots, (u_\star^{\alpha,(n)}, v_\star^{\alpha,(n)}, \tilde{u}_\star^{\alpha,(n)}, \tilde{v}_\star^{\alpha,(n)})$ der nach Bogenlänge parametrisierten Schnittkurve an diesen Punkten berechnet, können mit folgendem Verfahren zwei

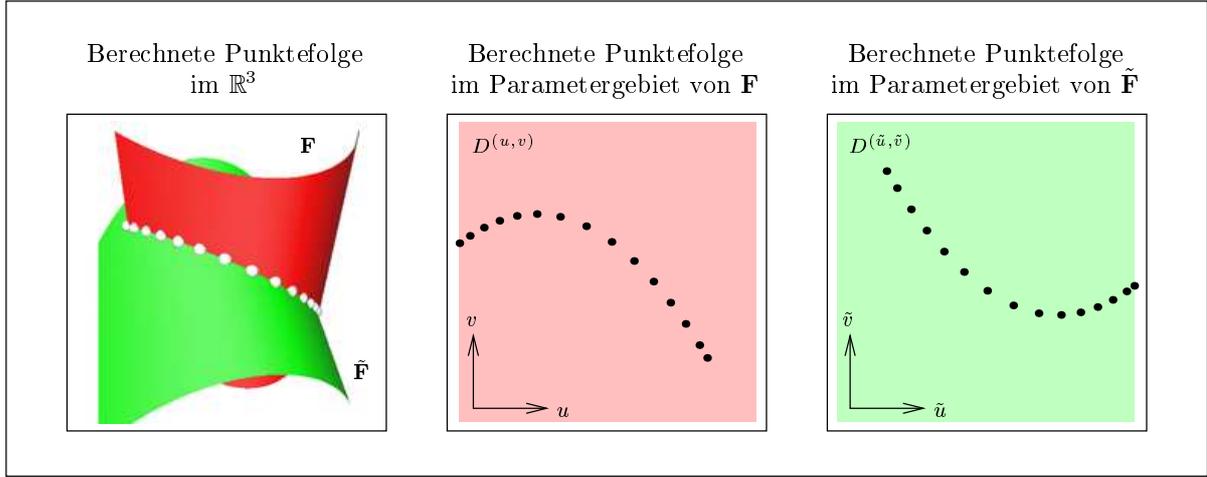


Abbildung 3.5: Eine berechnete Punktfolge auf einer Schnittkurve

stückweise polynomielle Trimming-Kurven $\mathbf{C} : \mathbb{R} \rightarrow D^{(u,v)}$ und $\tilde{\mathbf{C}} : \mathbb{R} \rightarrow D^{(\tilde{u},\tilde{v})}$ ermittelt werden, die gute Näherungen der betrachteten Schnittkurve darstellen. Das heißt für \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$ gilt $\mathbf{F}(\mathbf{C}(t)) \approx \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}(t))$.

Da die beiden Trimming-Kurven \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$ nach demselben Schema berechnet werden, wird im Folgenden nur die Berechnung von \mathbf{C} erläutert. Diese Trimming-Kurve der B-Spline-Fläche \mathbf{F} hat die Form

$$\mathbf{C}(t) = \begin{cases} \mathbf{C}^1(t) = (u^1(t), v^1(t)) & \text{für } t \in [t_0, t_1] \\ \mathbf{C}^2(t) = (u^2(t), v^2(t)) & \text{für } t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \\ \mathbf{C}^N(t) = (u^N(t), v^N(t)) & \text{für } t \in [t_{N-1}, t_N] \end{cases},$$

wobei die Teilkurven \mathbf{C}^α Polynomkurven sind. Um eine C^n -stetige Trimming-Kurve \mathbf{C} zu erhalten und die in Form der Ableitungen $u_\star^{\alpha,(1)}, \dots, u_\star^{\alpha,(n)}$ und $v_\star^{\alpha,(1)}, \dots, v_\star^{\alpha,(n)}$ zur Verfügung stehenden Informationen über die Schnittkurve vollständig auszunutzen, werden als Funktionen u^α und v^α die durch die Bedingungen

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} (u^\alpha(t), v^\alpha(t)) \right|_{t=t_{\alpha-1}} = (u_\star^{\alpha-1,(k)}, v_\star^{\alpha-1,(k)}) \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N \quad ,$$

$$k = 0, \dots, n \tag{3.24}$$

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} (u^\alpha(t), v^\alpha(t)) \right|_{t=t_\alpha} = (u_\star^{\alpha,(k)}, v_\star^{\alpha,(k)}) \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N \quad ,$$

$$k = 0, \dots, n \quad (3.25)$$

eindeutig festgelegten Polynome vom Grad $2n + 1$ gewählt. Die Parametrisierung der Trimming-Kurve \mathbf{C} wird durch

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_\alpha - t_{\alpha-1} &= \left\| \mathbf{F}(u_\star^{\alpha,(0)}, v_\star^{\alpha,(0)}) - \mathbf{F}(u_\star^{\alpha-1,(0)}, v_\star^{\alpha-1,(0)}) \right\|, \quad \alpha = 1, \dots, N \end{aligned}$$

festgelegt. Weichen die Raumkurven $\mathbf{F}(\mathbf{C}^\alpha(t))$, $t \in [t_{\alpha-1}, t_\alpha]$, nur wenig vom Verlauf einer Geraden ab (bei kleiner Schrittweite Δt ist dies der Fall), sind diese Kurven im Mittel etwa nach Bogenlänge parametrisiert. Dies ist eine wichtige Eigenschaft, da die die Teilkurven \mathbf{C}^α bestimmenden Ableitungen $u_\star^{\alpha,(1)}, \dots, u_\star^{\alpha,(n)}$ und $v_\star^{\alpha,(1)}, \dots, v_\star^{\alpha,(n)}$ für eine nach Bogenlänge parametrisierte Schnittkurve berechnet wurden (Abschnitt 3.3). Um explizite polynomielle Darstellungen der Teilkurven \mathbf{C}^α zu erhalten, werden sie gemäß

$$\mathbf{C}^\alpha(t) = \sum_{i=0}^{2n+1} B_i^{2n+1, [t_{\alpha-1}, t_\alpha]}(t) \mathbf{c}_i^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N$$

in *Bezier*-Form angesetzt. Für die Ableitungen dieser *Bezier*-Kurven an den Intervallgrenzen gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{C}^\alpha(t) \right|_{t=t_{\alpha-1}} &= \frac{(2n+1)!}{(2n+1-k)! (t_\alpha - t_{\alpha-1})^k} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \mathbf{c}_{k-i}^\alpha, \\ k &= 0, \dots, 2n+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{C}^\alpha(t) \right|_{t=t_\alpha} &= \frac{(2n+1)!}{(2n+1-k)! (t_\alpha - t_{\alpha-1})^k} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \mathbf{c}_{2n+1-i}^\alpha, \\ k &= 0, \dots, 2n+1. \end{aligned}$$

Einsetzen der Gleichungen 3.24 und 3.25 und Umformen liefert die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k^\alpha &= \frac{(2n+1-k)! (t_\alpha - t_{\alpha-1})^k}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} u_\star^{\alpha-1,(k)} \\ v_\star^{\alpha-1,(k)} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} \mathbf{c}_{k-i}^\alpha, \\ k &= 0, \dots, n \end{aligned}$$

$$\mathbf{c}_{2n+1-k}^\alpha = \frac{(2n+1-k)! (t_\alpha - t_{\alpha-1})^k}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} u_\star^{\alpha,(k)} \\ v_\star^{\alpha,(k)} \end{pmatrix} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} \mathbf{c}_{2n+1-i}^\alpha, \quad k = 0, \dots, n$$

für die gesuchten Kontrollpunkte.

Abbildung 3.6 zeigt ein Beispiel einer approximierten Schnittkurve sowohl im \mathbb{R}^3 als auch in den Parametergebieten beider Flächen.

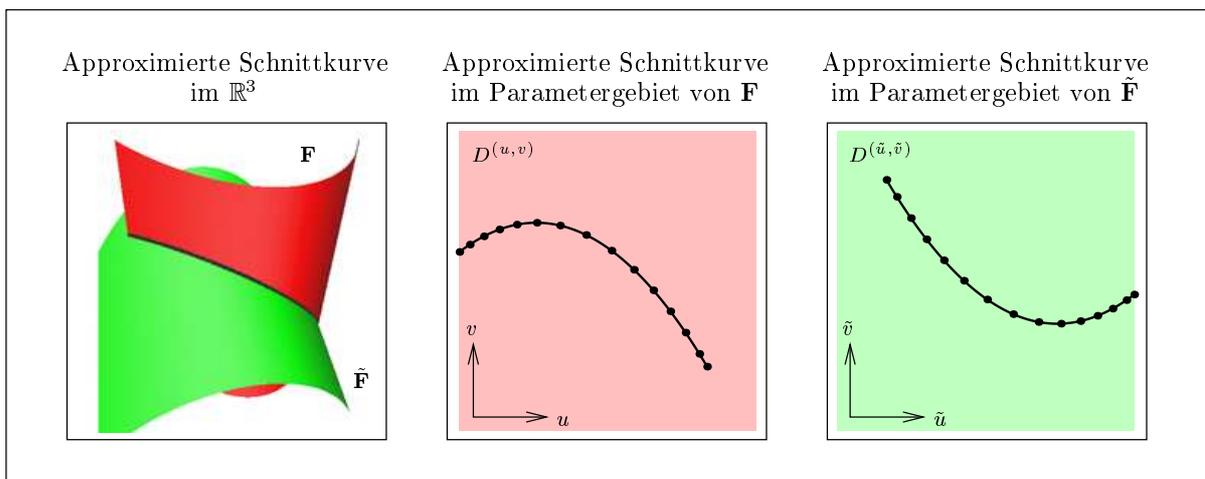


Abbildung 3.6: Durch stückweise Polynomkurven approximierte Schnittkurve

3.5.3 Bewerten der berechneten Schnittkurven

Um die Qualität der berechneten Trimming-Kurven \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$ bewerten zu können, muss ein geeignetes Fehlerfunktional definiert werden. Von besonderem Interesse ist der maximale Abstand δ_{\max} der beiden zugeordneten Raumkurven für den

$$\delta_{\max}(\mathbf{C}(t), \tilde{\mathbf{C}}(t)) \leq \max_{t \in [t_0, t_N]} \left(\left\| \mathbf{F}(\mathbf{C}(t)) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}(t)) \right\| \right) \quad (3.26)$$

gilt. Es handelt sich um eine Ungleichung, da der dem Abstand $\|\mathbf{F}(\mathbf{C}(t)) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}(t))\|$ zugeordnete Vektor $\mathbf{F}(\mathbf{C}(t)) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}(t))$ im Allgemeinen nicht den kürzesten Weg zur jeweils anderen Kurve beschreibt. Da die beiden Kurven \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$ dieselbe Folge von Punkten interpolieren und ihre ersten bis n -ten Ableitungen an diesen Punkten übereinstimmen, kann diese Ungleichung bei kleiner Schrittweite Δt in guter Näherung als Gleichungen betrachtet werden.

Um eine obere Schranke für den maximalen Abstand numerisch zu berechnen, wird die rechte Seite von Ungleichung (3.26) in kleinen Abständen äquidistant ausgewertet, wobei der maximale Wert als Näherung für δ_{\max} verwendet wird. Diese Methode ist zwar nicht besonders exakt, dafür aber sehr effizient, und sie liefert für die hier vorliegende Problemstellung mehr als brauchbare Approximationen.

3.5.4 Konvergenzbetrachtungen

Im Folgenden wird gezeigt, dass bei dem in diesem Abschnitt präsentierten Verfahren zur näherungsweise Berechnung von Schnittkurven in Parameterdarstellung bei kleinen Schrittweiten Δt in guter Näherung mindestens quadratische Konvergenz bezüglich δ_{\max} vorliegt. Quadratische Konvergenz bedeutet, dass bei Halbierung der Schrittweite Δt eine obere Schranke für den maximalen Abstand δ_{\max} mindestens um den Faktor 4 reduziert wird. Diese Aussage ist unabhängig vom Grad n der Taylor-Entwicklung und vom Grad $2n + 1$ der verwendeten stückweisen Polynomkurven.

Hermitopolynome

In Abschnitt 3.5.2 wurde gezeigt, wie die polynomiellen Trimming-Kurven \mathbf{C}^α vom Grad $2n + 1$ bei Vorgabe der ersten bis n -ten Ableitungen an den Interpolationspunkten in *Bezier*-Darstellung berechnet werden. Sehr viel leichter erhält man diese Funktionen bei Verwendung von Hermitopolynomen. Diese Darstellung eignet sich gut für die folgenden Konvergenzuntersuchungen, ist aber vor allem geometrische Interpretierbarkeit betreffend der *Bezier*-Darstellung deutlich unterlegen.

Die Hermitopolynome $H_i^{2n+1, [t_{\alpha-1}, t_\alpha]}(t)$, $i = 0, \dots, 2n + 1$, vom Grad $2n + 1$ über dem Intervall $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ sind durch

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} H_i^{2n+1, [t_{\alpha-1}, t_\alpha]}(t) \right|_{t=t_{\alpha-1}} = \delta_{i,k} \quad , \quad i = 0, \dots, n \quad , \quad k = 0, \dots, n$$

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} H_i^{2n+1, [t_{\alpha-1}, t_\alpha]}(t) \right|_{t=t_\alpha} = 0 \quad , \quad i = 0, \dots, n \quad , \quad k = 0, \dots, n$$

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} H_i^{2n+1, [t_{\alpha-1}, t_\alpha]}(t) \right|_{t=t_{\alpha-1}} = 0 \quad , \quad i = n + 1, \dots, 2n + 1 \quad , \quad k = 0, \dots, n$$

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} H_i^{2n+1, [t_{\alpha-1}, t_\alpha]}(t) \right|_{t=t_\alpha} = \delta_{2n+1-i,k} \quad , \quad i = n + 1, \dots, 2n + 1 \quad , \quad k = 0, \dots, n$$

definiert. Im weiteren Verlauf dieser Ausarbeitung wird die abkürzende Schreibweise $H_i^{\Delta\alpha} \equiv H_i^{2n+1, [t_{\alpha-1}, t_\alpha]}(t)$ verwendet. Die Interpolationspolynome \mathbf{C}^α haben damit die Form

$$\mathbf{C}^\alpha(t) = \sum_{i=0}^n \left(H_i^{\Delta_\alpha} \begin{pmatrix} u_\star^{\alpha-1,(i)} \\ v_\star^{\alpha-1,(i)} \end{pmatrix} + H_{2n+1-i}^{\Delta_\alpha} \begin{pmatrix} u_\star^{\alpha,(i)} \\ v_\star^{\alpha,(i)} \end{pmatrix} \right) . \quad (3.27)$$

Zwei leicht zu beweisende Eigenschaften der Hermitepolynome, die im weiteren Verlauf des Beweises Anwendung finden, lauten

$$H_0^{\Delta_\alpha} + H_{2n+1}^{\Delta_\alpha} = 1 \quad (3.28)$$

$$H_0^{\Delta_\alpha}(t_{\alpha-1} - t) + H_1^{\Delta_\alpha} + H_{2n}^{\Delta_\alpha} + H_{2n+1}^{\Delta_\alpha}(t_\alpha - t) = 0 . \quad (3.29)$$

Aus $|H_i^{[0,1]}| \leq \hat{C} = \text{konstant}$ folgen die Ungleichungen

$$\left| H_i^{\Delta_\alpha} \right| \leq \hat{C} (t_\alpha - t_{\alpha-1})^i = \text{konstant} , \quad i = 0, \dots, n$$

$$\left| H_i^{\Delta_\alpha} \right| \leq \hat{C} (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{2n+1-i} = \text{konstant} , \quad i = n+1, \dots, 2n+1 ,$$

die im Folgenden mehrmals für Abschätzungen verwendet werden. Dabei ist der Wert der Konstante \hat{C} unerheblich. Wichtig ist nur, dass dieser unabhängig von der Intervalllänge $t_\alpha - t_{\alpha-1}$ ist.

Quadratische Konvergenz im Parametergebiet

Seien $\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha : [t_{\alpha-1}, t_\alpha] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\tilde{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha : [t_{\alpha-1}, t_\alpha] \rightarrow \mathbb{R}^2$ Trimming-Kurven, die genau auf der Schnittkurve der beiden Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ verlaufen. Das heißt es gilt

$$\left\| \mathbf{F}(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t)) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t)) \right\| = 0 , \quad \alpha = 1, \dots, N .$$

Des Weiteren sollen $\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha$ und $\tilde{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha$ die Gleichungen

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t) \right|_{t=t_{\alpha-1}} = \begin{pmatrix} u_\star^{\alpha-1,(k)} \\ v_\star^{\alpha-1,(k)} \end{pmatrix} , \quad \alpha = 1, \dots, N , \quad k = 0, \dots, n \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t) \right|_{t=t_\alpha} = \begin{pmatrix} u_\star^{\alpha,(k)} \\ v_\star^{\alpha,(k)} \end{pmatrix} , \quad \alpha = 1, \dots, N , \quad k = 0, \dots, n \quad (3.31)$$

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} \tilde{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t) \right|_{t=t_{\alpha-1}} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_\star^{\alpha-1,(k)} \\ \tilde{v}_\star^{\alpha-1,(k)} \end{pmatrix} , \quad \alpha = 1, \dots, N , \quad k = 0, \dots, n \quad (3.32)$$

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} \tilde{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t) \right|_{t=t_\alpha} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_*^{\alpha,(k)} \\ \tilde{v}_*^{\alpha,(k)} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad k = 0, \dots, n \quad (3.33)$$

erfüllen.

Die *Taylor*-Entwicklungen von $\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha$ bis zur ersten Ordnung einschließlich den *Lagrange* Restgliedern an den Entwicklungspunkten $t_{\alpha-1}$ und t_α lauten

$$\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t) = \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t_{\alpha-1}) + \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_{\alpha-1})(t - t_{\alpha-1}) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(\underline{\xi}_\alpha)(t - t_{\alpha-1})^2 \quad (3.34)$$

$$\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t) = \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t_\alpha) + \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_\alpha)(t - t_\alpha) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(\bar{\xi}_\alpha)(t - t_\alpha)^2, \quad (3.35)$$

wobei $\underline{\xi}_\alpha$ und $\bar{\xi}_\alpha$ von t abhängige unbekannte Werte aus den Intervallen $(t_{\alpha-1}, t)$ beziehungsweise (t, t_α) sind. Durch längere Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}^\alpha(t) - \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t)\| &= \text{Gleichung (3.28)} \\ &= \left\| \mathbf{C}^\alpha(t) - H_0^{\Delta_\alpha} \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t) - H_{2n+1}^{\Delta_\alpha} \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t) \right\| = \text{Gleichungen (3.27), (3.30) bis (3.35)} \\ &= \left\| \sum_{i=0}^n \left(H_i^{\Delta_\alpha} \left. \frac{d^i}{dt^i} \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t) \right|_{t=t_{\alpha-1}} + H_{2n+1-i}^{\Delta_\alpha} \left. \frac{d^i}{dt^i} \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t) \right|_{t=t_\alpha} \right) - \right. \\ &\quad \left. H_0^{\Delta_\alpha} \left(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t_{\alpha-1}) + \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_{\alpha-1})(t - t_{\alpha-1}) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(\underline{\xi}_\alpha)(t - t_{\alpha-1})^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. H_{2n+1}^{\Delta_\alpha} \left(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t_\alpha) + \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_\alpha)(t - t_\alpha) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(\bar{\xi}_\alpha)(t - t_\alpha)^2 \right) \right\| = \\ &= \left\| H_1^{\Delta_\alpha} \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_{\alpha-1}) + H_{2n}^{\Delta_\alpha} \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_\alpha) + \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\sum_{i=2}^n \left(H_i^{\Delta_\alpha} \left. \frac{d^i}{dt^i} \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t) \right|_{t=t_{\alpha-1}} + H_{2n+1-i}^{\Delta_\alpha} \left. \frac{d^i}{dt^i} \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t) \right|_{t=t_\alpha} \right)}_{\|\dots\| \leq A(t_\alpha - t_{\alpha-1})^2, \quad A = \text{konstant}} - \right. \\ &\quad \left. H_0^{\Delta_\alpha} \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_{\alpha-1})(t - t_{\alpha-1}) - H_{2n+1}^{\Delta_\alpha} \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_\alpha)(t - t_\alpha) - \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\frac{1}{2} H_0^{\Delta_\alpha} \ddot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(\underline{\xi}_\alpha)(t - t_{\alpha-1})^2 - \frac{1}{2} H_{2n+1}^{\Delta_\alpha} \ddot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(\bar{\xi}_\alpha)(t - t_\alpha)^2}_{\|\dots\| \leq B(t_\alpha - t_{\alpha-1})^2, \quad B = \text{konstant}} \right\| \leq \text{Mittelwert-Satz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| H_1^{\Delta\alpha} \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_{\alpha-1}) + H_{2n}^{\Delta\alpha} \left(\ddot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(\hat{\xi})(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_{\alpha-1}) \right) - \right. \\
&\quad \left. H_0^{\Delta\alpha} \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_{\alpha-1})(t - t_{\alpha-1}) - H_{2n+1}^{\Delta\alpha} \left(\ddot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(\check{\xi})(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \dot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t_{\alpha-1}) \right) (t - t_\alpha) \right\| + \\
&\quad (A + B)(t_\alpha - t_{\alpha-1})^2 = \quad \text{Gleichung (3.29)} \\
&= \underbrace{\left\| H_{2n}^{\Delta\alpha} \ddot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(\hat{\xi})(t_\alpha - t_{\alpha-1}) - H_{2n+1}^{\Delta\alpha} \ddot{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(\check{\xi})(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \right\|}_{\dots \leq C (t_\alpha - t_{\alpha-1})^2, \quad C = \text{konstant}} + (A + B)(t_\alpha - t_{\alpha-1})^2 \leq \\
&\leq (A + B + C)(t_\alpha - t_{\alpha-1})^2,
\end{aligned}$$

eine obere Schranke für den Abstand der Trimming-Kurve \mathbf{C}^α von der exakten Trimming-Kurve $\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha$. Völlig analog dazu lässt sich die Ungleichung

$$\left\| \tilde{\mathbf{C}}^\alpha(t) - \tilde{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t) \right\| \leq (\tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{C})(t_\alpha - t_{\alpha-1})^2$$

herleiten.

Quadratische Konvergenz im \mathbb{R}^3

Durch *Taylor*-Entwicklung um den Entwicklungspunkt $\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t)$ erhält man

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{F}(\mathbf{C}^\alpha(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t)) \right\| &= \quad \textit{Taylor-Entwicklung} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{F}_u(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t)) \\ \mathbf{F}_v(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t)) \end{pmatrix} (\mathbf{C}^\alpha(t) - \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t)) \right\| + \mathcal{O}(\|\mathbf{C}^\alpha(t) - \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t)\|^2) \leq \\
&\leq \underbrace{\left(\|\mathbf{F}_u(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t))\| + \|\mathbf{F}_v(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t))\| \right)}_{\dots \leq D, \quad D = \text{konstant}} \|\mathbf{C}^\alpha(t) - \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t)\| + \\
&\quad \mathcal{O}(\|\mathbf{C}^\alpha(t) - \mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t)\|^2) \leq \\
&\leq \underbrace{(A + B + C) D}_{\dots \leq E, \quad E = \text{konstant}} (t_\alpha - t_{\alpha-1})^2 + \mathcal{O}((t_\alpha - t_{\alpha-1})^4) = \\
&= E(t_\alpha - t_{\alpha-1})^2 + \mathcal{O}((t_\alpha - t_{\alpha-1})^4).
\end{aligned}$$

Aufgrund von $\Delta t \approx t_\alpha - t_{\alpha-1}$ gilt

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{C}^\alpha(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t))\| \lesssim E(\Delta t)^2 + \mathcal{O}((\Delta t)^4) \quad .$$

Das bedeutet, dass bei kleinen Schrittweiten Δt der Abstand zwischen den exakten Teilschnittkurven $\mathbf{F}(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t))$ und deren Approximationen $\mathbf{F}(\mathbf{C}^\alpha(t))$ in guter Näherung mindestens quadratisch abnimmt. Analog dazu lässt sich

$$\|\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}^\alpha(t)) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t))\| \lesssim \tilde{E}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}((\Delta t)^4)$$

zeigen. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\mathbf{C}^\alpha(t)) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}^\alpha(t))\| &\leq \|\mathbf{F}(\mathbf{C}^\alpha(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{C}_{\text{opt}}^\alpha(t))\| + \|\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}^\alpha(t)) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}_{\text{opt}}^\alpha(t))\| \lesssim \\ &\lesssim (E + \tilde{E})(\Delta t)^2 + \mathcal{O}((\Delta t)^4) \quad . \end{aligned}$$

Für den maximalen Abstand gilt deshalb bei kleiner Schrittweite Δt

$$\delta_{\max}(\mathbf{C}(t), \tilde{\mathbf{C}}(t)) \leq \max_{t \in [t_0, t_N]} \left(\|\mathbf{F}(\mathbf{C}(t)) - \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{C}}(t))\| \right) \lesssim (E + \tilde{E})(\Delta t)^2 \quad .$$

Damit wurde gezeigt, dass das Verfahren zur Approximation von Schnittkurven zweier Flächen durch stückweise Polynome im Bereich kleiner Schrittweiten in guter Näherung mindestens quadratische Konvergenz aufweist.

Experimentelle Ergebnisse zur Konvergenz

Das eben theoretisch betrachtete Konvergenzverhalten der Schnittkurven-Approximation wurde mit verschiedenen B-Spline-Flächen auch experimentell untersucht. Zwei Beispiele werden im Folgenden präsentiert.

Die verwendeten Flächen, deren maximale Ausdehnungen jeweils etwa 30 Einheiten betragen, sind in Abbildung 3.7 zu sehen. In den Tabellen 3.1 und 3.2 sind die experimentell ermittelten Werte für den maximalen Fehler δ_{\max} bei verschiedenen Schrittweiten Δt und verschiedenen Graden n der *Taylor*-Entwicklung und $2n + 1$ der Interpolationspolynome aufgelistet.

$\frac{\delta_{\max}(2\Delta t)}{\delta_{\max}(\Delta t)}$ ist das Verhältnis zweier maximaler Fehler, deren Schrittweitenverhältnis $\frac{2}{1}$ beträgt. Da diese Verhältnisse im Mittel deutlich größer als 4 sind, wird durch sie die weiter oben getroffene theoretische Aussage untermauert. Bei den hier betrachteten Schnittkurven liegt nicht nur quadratische sondern sogar wesentlich stärkere Konvergenz vor.

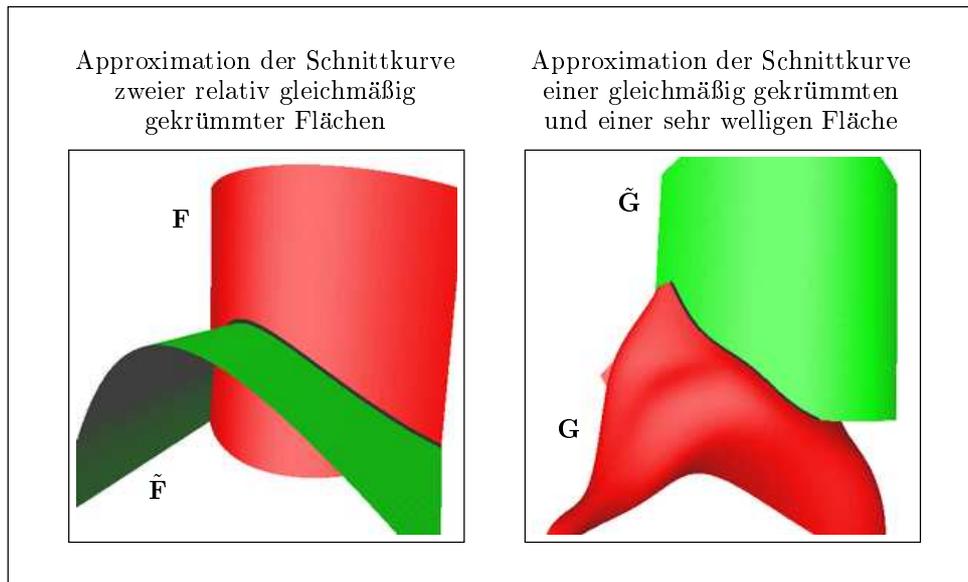


Abbildung 3.7: Experimentelle Konvergenzuntersuchung der Schnittkurven-Approximation

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$	
Δt	δ_{\max}	$\frac{\delta_{\max}(2 \Delta t)}{\delta_{\max}(\Delta t)}$	δ_{\max}	$\frac{\delta_{\max}(2 \Delta t)}{\delta_{\max}(\Delta t)}$	δ_{\max}	$\frac{\delta_{\max}(2 \Delta t)}{\delta_{\max}(\Delta t)}$
8.000	6.808877e-02		5.535636e-02		3.329813e-02	
4.000	6.742320e-03	10.0987	3.260113e-03	16.979	2.323466e-03	14.3312
2.000	4.769676e-04	14.1358	1.789010e-04	18.2230	1.426572e-04	16.2871
1.000	3.259987e-05	14.6310	1.094715e-05	16.3423	9.007370e-06	15.8378
0.500	2.077487e-06	15.6920	6.772021e-07	16.1653	5.624162e-07	16.0155
0.250	1.303839e-07	15.933	4.221287e-08	16.0425	3.512775e-08	16.0106
0.125	8.137119e-09	16.0233	2.623715e-09	16.0890	2.181067e-09	16.1058

Tabelle 3.1: Messergebnisse bei der Schnittkurven-Approximation von \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$

Des Weiteren ist zu erkennen, dass die Konvergenz scheinbar unabhängig von n ist. Höhere Grade n erzielen zwar bessere Ergebnisse, die Konvergenzgeschwindigkeit ist aber etwa die gleiche.

3.6 Erzeugen einer C^0 -stetigen Gesamtfläche

Durch die in den Abschnitten 3.3 bis 3.5 vorgestellten Methoden ist es nun möglich, bei Kenntnis eines Schnittkurvenpunktes in Parameterdarstellung, diese Schnittkurve durch stückweise Polynomkurven anzunähern. Darüber hinaus sind gewisse Konvergenzeigenschaften bezüglich

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$	
Δt	δ_{\max}	$\frac{\delta_{\max}(2 \Delta t)}{\delta_{\max}(\Delta t)}$	δ_{\max}	$\frac{\delta_{\max}(2 \Delta t)}{\delta_{\max}(\Delta t)}$	δ_{\max}	$\frac{\delta_{\max}(2 \Delta t)}{\delta_{\max}(\Delta t)}$
8.000	1.428616e-01		3.441799e-02		1.466159e-02	
4.000	2.279972e-02	6.2659	4.112592e-03	8.3689	1.325051e-03	11.0649
2.000	1.833666e-03	12.4340	3.268723e-04	12.5816	1.819546e-04	7.2823
1.000	2.129983e-04	8.6088	1.955567e-05	16.7150	1.922463e-05	9.4647
0.500	3.496624e-05	6.0915	8.885531e-06	2.2008	4.607213e-06	4.1727
0.250	1.011251e-06	34.5772	3.172742e-07	28.0058	6.860549e-07	6.7155
0.125	3.062771e-07	3.3018	7.157839e-08	4.4325	3.792681e-08	18.0889

Tabelle 3.2: Messergebnisse bei der Schnittkurven-Approximation von \mathbf{G} und $\tilde{\mathbf{G}}$

des maximalen Abstands der Schnittkurven-Approximationen bekannt.

Bei der C^0 -stetigen Rekonstruktion einer Oberfläche mit getrimmten B-Spline-Flächen stellt sich ein leicht modifiziertes Problem. Für jedes Paar von B-Spline-Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ und jeden gemeinsamen Kantenzug ihrer zugeordneten Segmente ist in beiden Parametergebieten jeweils eine Trimming-Kurve \mathbf{C} beziehungsweise $\tilde{\mathbf{C}}$ zu bestimmen. Die diesen Trimming-Kurven entsprechenden Raumkurven müssen bis auf eine vom Benutzer vorzugebende Toleranzgrenze ε übereinstimmen, also eine Approximation der Schnittkurve der beiden Flächen bilden. Das heißt für \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$ muss $\delta_{\max}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}) < \varepsilon$ gelten. Dabei sollen die Endpunkte der Trimming-Kurven mit den Parameterpunkten der Endpunkte ihres gemeinsamen Kantenzuges (dabei handelt es sich um Sternpunkte, die von den approximierenden B-Spline-Flächen interpoliert werden) übereinstimmen.

3.6.1 Berechnen von Trimming-Kurven mit vorgegebenen Endpunkten

Im Folgenden werden die abkürzenden Schreibweisen $\mathbf{p}_\alpha^\beta \equiv (u_\alpha^\beta, v_\alpha^\beta)$ und $\tilde{\mathbf{p}}_\alpha^\beta \equiv (\tilde{u}_\alpha^\beta, \tilde{v}_\alpha^\beta)$ verwendet.

Seien $\mathbf{p}^\leftarrow \in D^{(u,v)}$ und $\mathbf{p}^\rightarrow \in D^{(u,v)}$ die Endpunkte des betrachteten gemeinsamen Kantenzuges im Parametergebiet von \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{p}}^\leftarrow \in D^{(\tilde{u},\tilde{v})}$ und $\tilde{\mathbf{p}}^\rightarrow \in D^{(\tilde{u},\tilde{v})}$ die Endpunkte desselben Kantenzuges im Parametergebiet von $\tilde{\mathbf{F}}$.

Zuerst wird wie gehabt, durch *Taylor*-Entwicklung und anschließende *Newton*-Iteration, eine Folge von Punkten auf der Schnittkurve in Parameterdarstellung berechnet. Als Startwert zum Verfolgen der Schnittkurve wird $(\mathbf{p}^\leftarrow, \tilde{\mathbf{p}}^\leftarrow)$ gewählt, einer der beiden Endpunkte des gemeinsamen Kantenzuges. Von diesem Punkt aus führt die ermittelte Punktefolge

$$\left[(\mathbf{p}_\star^{0,(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_\star^{0,(0)}), \dots, (\mathbf{p}_\star^{M-1,(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_\star^{M-1,(0)}), (\mathbf{p}^\leftarrow, \tilde{\mathbf{p}}^\leftarrow), (\mathbf{p}_\star^{M+1,(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_\star^{M+1,(0)}), \dots, \right.$$

$$(\mathbf{p}_\star^{N,(0)}, \tilde{\mathbf{p}}_\star^{N,(0)}) \quad ,$$

im Folgenden abgekürzt durch

$$\left[(\mathbf{p}^0, \tilde{\mathbf{p}}^0), \dots, (\mathbf{p}^{M-1}, \tilde{\mathbf{p}}^{M-1}), (\mathbf{p}^\leftarrow, \tilde{\mathbf{p}}^\leftarrow), (\mathbf{p}^{M+1}, \tilde{\mathbf{p}}^{M+1}), \dots, (\mathbf{p}^N, \tilde{\mathbf{p}}^N) \right] \quad ,$$

in beide Richtungen jeweils bis zum Rand von $D^{(u,v)} \times D^{(\tilde{u},\tilde{v})}$ ². Die Schrittweite Δt sollte so gewählt werden, dass der Verlauf der Schnittkurve bereits gut aus der Punktefolge zu erkennen ist. Die Wahl $\Delta t = \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{p}^\leftarrow) - \mathbf{F}(\mathbf{p}^\rightarrow)\|}{20}$ hat sich für die im Rahmen dieser Arbeit getesteten Datensätze als vernünftig erwiesen. Im relevanten Bereich der Kurve liegen dann im Mittel etwas mehr als 20 Interpolationspunkte.

Um durch stückweise Polynominterpolation Trimming-Kurven mit Endpunkten \mathbf{p}^\leftarrow und \mathbf{p}^\rightarrow beziehungsweise $\tilde{\mathbf{p}}^\leftarrow$ und $\tilde{\mathbf{p}}^\rightarrow$ zu erhalten, muss $(\mathbf{p}^\rightarrow, \tilde{\mathbf{p}}^\rightarrow)$ an geeigneter Stelle in die berechnete Punktefolge eingefügt werden. Dazu werden die Abstände d_α zwischen den Strecken $\overline{\mathbf{p}^{\alpha-1}\mathbf{p}^\alpha}$ und dem Punkt \mathbf{p}^\rightarrow beziehungsweise \tilde{d}_α zwischen den Strecken $\overline{\tilde{\mathbf{p}}^{\alpha-1}\tilde{\mathbf{p}}^\alpha}$ und dem Punkt $\tilde{\mathbf{p}}^\rightarrow$ ermittelt. Mit α_{\min} und $\tilde{\alpha}_{\min}$ werden im Folgenden die den minimalen Abständen zugeordneten Indizes bezeichnet, das heißt es gilt $d_{\alpha_{\min}} = \min_\alpha(d_\alpha)$ und $\tilde{d}_{\tilde{\alpha}_{\min}} = \min_\alpha(\tilde{d}_\alpha)$. Abhängig davon werden verschiedene Fälle unterschieden.

- **Fall 1:** $d_{\alpha_{\min}} > \frac{\|\mathbf{p}^{\alpha_{\min}-1} - \mathbf{p}^{\alpha_{\min}}\|}{2}$ oder $\tilde{d}_{\tilde{\alpha}_{\min}} > \frac{\|\tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}_{\min}-1} - \tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}_{\min}}\|}{2}$

Der minimale Abstand zu den betrachteten Strecken ist größer als die halbe Länge derjenigen Strecke, zu der dieser minimale Abstand gemessen wurde. Mit großer Wahrscheinlichkeit interpoliert die der Punktefolge entsprechende Schnittkurve den Punkt $(\mathbf{p}^\rightarrow, \tilde{\mathbf{p}}^\rightarrow)$ nicht. Dies tritt dann auf, wenn die von den Punkten $(\mathbf{p}^\leftarrow, \tilde{\mathbf{p}}^\leftarrow)$ und $(\mathbf{p}^\rightarrow, \tilde{\mathbf{p}}^\rightarrow)$ ausgehenden Schnittkurven der Flächen \mathbf{F} und $\tilde{\mathbf{F}}$ anstatt sich zu treffen die Parametergebiete in beiden Richtungen verlassen. Die gesuchte Schnittkurve existiert nicht und kann daher auch nicht berechnet werden. Auf dieses Problem wird ausführlicher in Abschnitt 3.8 eingegangen.

- **Fall 2:** $|\alpha_{\min} - \tilde{\alpha}_{\min}| > 1$

Die Strecken, zu denen die minimalen Abstände $d_{\alpha_{\min}}$ und $\tilde{d}_{\tilde{\alpha}_{\min}}$ gemessen wurden, gehören zu weit voneinander entfernten Teilen der Schnittkurve. Ein sinnvolles Einfügen des Punktes $(\mathbf{p}^\rightarrow, \tilde{\mathbf{p}}^\rightarrow)$ ist damit nicht möglich. Die gesuchte Schnittkurve kann deshalb nicht berechnet werden. Dieser Fall sollte niemals auftreten und hat lediglich die Funktion einer Sicherheitsabfrage bei einer Implementierung des Verfahrens.

- **Fall 3:** $|\alpha_{\min} - \tilde{\alpha}_{\min}| = 1$

Die minimalen Abstände $d_{\alpha_{\min}}$ und $\tilde{d}_{\tilde{\alpha}_{\min}}$ wurden zu zwei benachbarten

²Eine Ausnahme bilden zyklische Schnittkurven. Auf zyklische Schnittkurven wird kurz in Abschnitt 3.8 eingegangen.

Strecken gemessen. Der Punkt $(\mathbf{p}^{\rightarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\rightarrow})$ liegt vermutlich sehr nahe am Punkt $(\mathbf{p}^{\min(\alpha_{\min}, \tilde{\alpha}_{\min})}, \tilde{\mathbf{p}}^{\min(\alpha_{\min}, \tilde{\alpha}_{\min})})$. Aus diesem Grund wird $(\mathbf{p}^{\min(\alpha_{\min}, \tilde{\alpha}_{\min})}, \tilde{\mathbf{p}}^{\min(\alpha_{\min}, \tilde{\alpha}_{\min})})$ durch $(\mathbf{p}^{\rightarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\rightarrow})$ ersetzt.

- **Fall 4:** $|\alpha_{\min} - \tilde{\alpha}_{\min}| = 0$

Die minimalen Abstände $d_{\alpha_{\min}}$ und $\tilde{d}_{\tilde{\alpha}_{\min}}$ wurden zu zwei korrespondierenden Strecken gemessen. Der Punkt $(\mathbf{p}^{\rightarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\rightarrow})$ wird zwischen den benachbarten Punkten $(\mathbf{p}^{\alpha_{\min}-1}, \tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}_{\min}-1})$ und $(\mathbf{p}^{\alpha_{\min}}, \tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}_{\min}})$ eingefügt. Liegt $(\mathbf{p}^{\rightarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\rightarrow})$ sehr nahe an $(\mathbf{p}^{\alpha_{\min}-1}, \tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}_{\min}-1})$, das heißt mindestens eine der Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^{\rightarrow} - \mathbf{p}^{\alpha_{\min}-1}\| &< \frac{\|\mathbf{p}^{\alpha_{\min}-1} - \mathbf{p}^{\alpha_{\min}}\|}{5} \\ \|\tilde{\mathbf{p}}^{\rightarrow} - \tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}_{\min}-1}\| &< \frac{\|\tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}_{\min}-1} - \tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}_{\min}}\|}{5} \end{aligned}$$

ist erfüllt, wird $(\mathbf{p}^{\alpha_{\min}-1}, \tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}_{\min}-1})$ gelöscht. Eine entsprechende Aussage gilt auch für $(\mathbf{p}^{\alpha_{\min}}, \tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}_{\min}})$.

In der Punktefolge, die nun sowohl $(\mathbf{p}^{\leftarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\leftarrow})$ als auch $(\mathbf{p}^{\rightarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\rightarrow})$ enthält, werden von beiden Enden ausgehend solange Punkte gelöscht, bis die Punkte $(\mathbf{p}^{\leftarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\leftarrow})$ und $(\mathbf{p}^{\rightarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\rightarrow})$ erreicht werden. Die resultierende Punktefolge der Form $[(\mathbf{p}^{\leftarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\leftarrow}), \dots, (\mathbf{p}^{\rightarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\rightarrow})]$ oder $[(\mathbf{p}^{\rightarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\rightarrow}), \dots, (\mathbf{p}^{\leftarrow}, \tilde{\mathbf{p}}^{\leftarrow})]$ kann nun, wie in Abschnitt 3.5.2 erläutert, durch stückweise Polynome interpoliert werden. Die dadurch gewonnenen Trimming-Kurven \mathbf{C} beziehungsweise $\tilde{\mathbf{C}}$ besitzen die gewünschten Endpunkte \mathbf{p}^{\leftarrow} und \mathbf{p}^{\rightarrow} beziehungsweise $\tilde{\mathbf{p}}^{\leftarrow}$ und $\tilde{\mathbf{p}}^{\rightarrow}$.

3.6.2 Schrittweises Verfeinern der berechneten Trimming-Kurven

Die berechneten Trimming-Kurven \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$ müssen die Ungleichung $\delta_{\max}(\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}) < \varepsilon$ erfüllen, wobei ε eine vom Benutzer vorzugebende Toleranzgrenze für den maximalen Abstand der zugeordneten Raumkurven ist.

Verletzt ein Paar von Teil-Trimming-Kurven \mathbf{C}^{α} und $\tilde{\mathbf{C}}^{\alpha}$ die Bedingung $\delta_{\max}(\mathbf{C}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{C}}^{\alpha}) < \varepsilon$, wird zwischen den von diesen Kurven interpolierten Punkten $(\mathbf{p}^{\alpha-1}, \tilde{\mathbf{p}}^{\alpha-1})$ und $(\mathbf{p}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{p}}^{\alpha})$ ein weiterer Interpolationspunkt eingefügt. Als Startwert für das dafür notwendige *Newton*-Verfahren wählt man zweckmäßiger Weise $(\mathbf{C}^{\alpha}(\frac{1}{2}(t_{\alpha-1} + t_{\alpha})), \tilde{\mathbf{C}}^{\alpha}(\frac{1}{2}(t_{\alpha-1} + t_{\alpha})))$. Die *Taylor*-Entwicklung dieses neuen Interpolationspunktes kann wie üblich berechnet werden. Die Trimming-Kurven \mathbf{C} und $\tilde{\mathbf{C}}$ müssen nur lokal aktualisiert werden, das heißt die das Abstandskriterium nicht erfüllenden Teil-Trimming-Kurven \mathbf{C}^{α} und $\tilde{\mathbf{C}}^{\alpha}$ werden durch jeweils zwei neue Teil-Trimming-Kurven ersetzt.

Dieser Verfeinerungsschritt wird solange wiederholt, bis alle Paare von Teil-Trimming-Kurven $\delta_{\max}(\mathbf{C}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{C}}^{\alpha}) < \varepsilon$ erfüllen.

3.6.3 Rand-Trimming-Kurven bei nicht-geschlossenen Oberflächen

Bei der Rekonstruktion von Oberflächen aus nicht geschlossenen Dreiecksnetzen müssen für B-Spline-Flächen, die Randsegmente repräsentieren, Rand-Trimming-Kurven angegeben werden.

Die beiden Endpunkte einer Rand-Trimming-Kurve sind die beiden Sternpunkte, an denen der Segmentrand vom Verlauf des Dreiecksnetz-Randes abweicht. Als weitere Interpolationspunkte dienen die Punkte auf dem Segmentrand zwischen diesen beiden Endpunkten. Durch geeignete Schätzung der ersten und zweiten Ableitungen an diesen Punkten (eine Möglichkeit dafür ist in Unterabschnitt 4.4.3 zu finden) erhält man eine Reihe von Bedingungen, die eindeutig eine C^2 -stetige stückweise polynomielle Trimming-Kurve vom Grad 5 festlegen. Diese im Bereich des Segmentrandes verlaufende Trimming-Kurve kann nach gewohntem Schema bestimmt werden (Unterabschnitt 3.5.2).

3.7 Ergebnisse

Während für die in den Abschnitten 3.3 bis 3.5 präsentierten Methoden zur *Taylor*-Entwicklung, zur numerischen Berechnung von Punkten auf der Schnittkurve und zur Approximation dieser durch stückweise Polynome die Effektivität unter den angegebenen Voraussetzungen mathematisch gezeigt wurde, handelt es sich bei der Anwendung dieser Methoden auf das Oberflächen-Rekonstruktionsproblem im letzten Abschnitt um ein heuristisches Verfahren. Für diese Heuristik kann nicht bewiesen werden, dass sie stets korrekte Ergebnisse liefert, da sich theoretisch Beispiele konstruieren lassen, bei denen das Verfahren scheitert.

Für praktische Zwecke jedoch ist die Erfolgsquote der Schnittkurven-Bestimmung sehr hoch. Alle im Rahmen dieser Arbeit getesteten Oberflächen wurden fehlerfrei rekonstruiert. Zu jeder vollständig in beiden zugeordneten Parametergebieten verlaufenden Schnittkurve wurde ein Paar von Trimming-Kurven berechnet, deren maximaler Abstand im \mathbb{R}^3 eine vorgegebene Toleranzgrenze unterschreitet.

Ein Nachteil der in dieser Arbeit entwickelten Methode ist jedoch, dass durch ungeschickte Segmentierung B-Spline-Flächen erzeugt werden, deren zugeordnete Segmente zwar einen gemeinsamen Rand haben, deren Schnittkurve aber teilweise außerhalb der Parametergebiete verläuft oder aber aus mehreren Zyklen besteht. Auf diese Weise entstehen Löcher in der rekonstruierten Oberfläche. Die angestrebte C^0 -Stetigkeit geht damit verloren. Eine Vergrößerung der Parametergebiete im Fall von Schnittkurven, die diese Parametergebiete verlassen, ist meist nicht sinnvoll, da die zugeordnete Raumkurve oft sehr weit vom Modell entfernt verläuft, teilweise sogar ins Unendliche strebt. Dieses Problem tritt vor allem bei sehr glatten Dreiecksnetzen auf. Bei solchen Netzen lässt sich häufig gar keine Segmentierung finden, die dieses Problem behebt. Um derartige Ergebnisse wenigstens sinnvoll darstellen zu können, wurde in solchen Fällen linear entlang der Segmentränder getrimmt. Abbildung 3.8 zeigt ein Beispiel für eine relativ problematische Oberfläche.

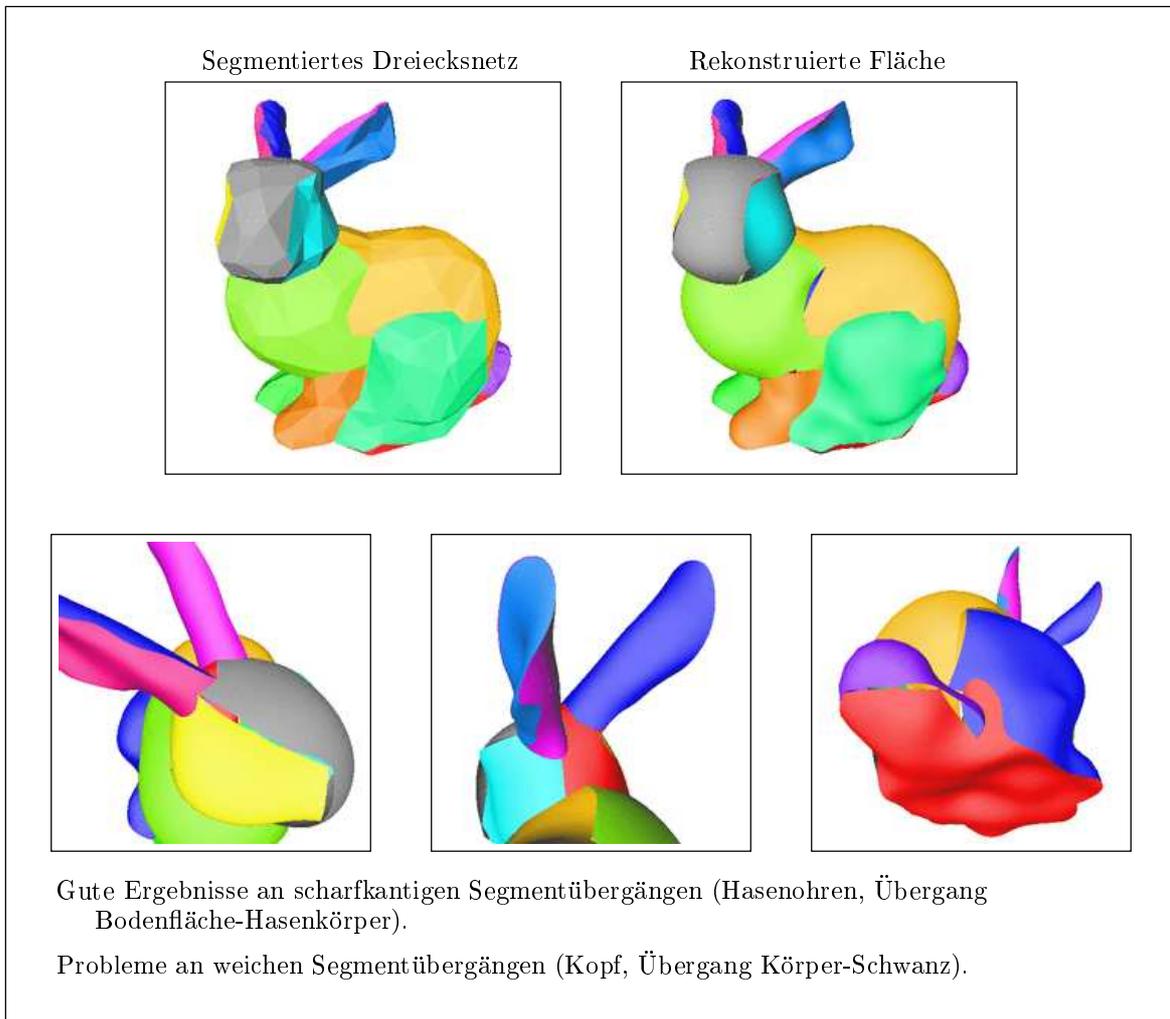
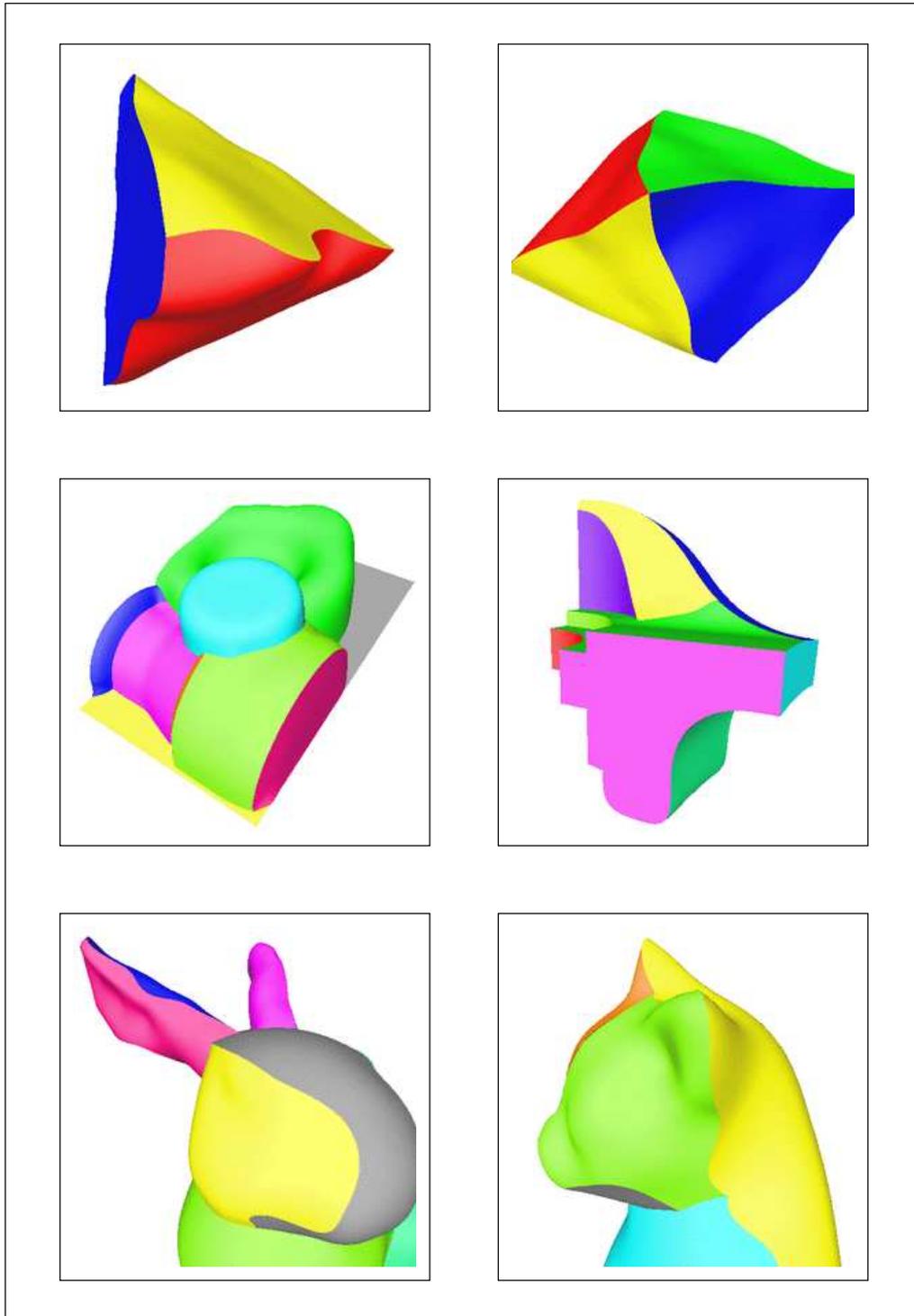


Abbildung 3.8: Probleme des Rekonstruktionsverfahrens bei einer glatten Oberfläche

Bei scharfkantigen Oberflächen oder geschickter Segmentierung liefert das Rekonstruktionsverfahren ausgezeichnete Ergebnisse. Folglich eignet sich die in diesem Kapitel vorgestellte Methode besonders für Oberflächen, die scharfe Kanten aufweisen, zum Beispiel mechanische Bauteile. Für glatte Oberflächen sollte vorzugsweise das im folgenden Kapitel präsentierte Verfahren zur C^2 -stetigen Oberflächen-Rekonstruktion verwendet werden.

Abschließend sind in Abbildung 3.9 eine Reihe von C^0 -stetigen Oberflächen zu sehen, die mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren rekonstruiert wurden.

Abbildung 3.9: C^0 -stetige Rekonstruktionen verschiedener Oberflächen

3.8 Ausblick

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Ausblick auf eine mögliche zukünftige Entwicklung des hier präsentierten Verfahrens gegeben.

Die Schnittkurven-Berechnung arbeitet sehr zuverlässig und liefert in jeder Hinsicht die gewünschten Ergebnisse.

Was noch nicht möglich ist, ist die Bestimmung zyklischer Schnittkurven. Solche Schnittkurven treten zum Beispiel auf, wenn man eine Kugel in zwei Halbkugeln segmentiert. Das Hauptproblem dabei besteht darin, zu erkennen, wann die auf der Schnittkurve liegende Punktefolge erneut denselben Teil dieser Kurve durchläuft (im Allgemeinen werden sich die Punkte nicht exakt wiederholen). Eine solche Erweiterung ist vermutlich nicht besonders aufwendig zu entwickeln. Ein ähnliches Vorgehen wie beim Einfügen des zweiten Schnittkurven-Interpolationspunktes in die bestehende Punktefolge (Unterabschnitt 3.6.1) sollte auch hier zum Erfolg führen.

Das eigentliche Problem dieses Verfahrens besteht darin, dass Schnittkurven häufig die beiden zugeordneten Parametergebiete verlassen. Dieses Problem steht in keiner Verbindung mit der in diesem Kapitel ausführlich betrachteten Schnittkurven-Approximation. Um es zu vermeiden müsste bereits wesentlich früher, bei der Approximation der Segmente durch B-Spline-Flächen, angesetzt werden. Zum Beispiel könnten die approximierenden B-Spline-Flächen an zu glatten Segmentübergängen schwach verändert werden, sodass mit Sicherheit Schnittkurven im Bereich der Übergänge vorliegen. Diese problematischen Stellen im Vorfeld zu entdecken ist voraussichtlich nicht ganz einfach. Außerdem dürfen die Flächen nur in geringem Ausmaß verändert werden, da die resultierende Gesamtfläche die Form des Dreiecksnetzes relativ genau nachempfinden sollte.

Dieser letzte Aspekt bietet eine Reihe interessanter Ansätze für weitere Forschungsaktivitäten und ist mit Sicherheit derjenige, dem bei einer Weiterentwicklung des hier vorgestellten Verfahrens das Hauptaugenmerk geschenkt werden sollte.

Kapitel 4

C^2 -stetige Übergänge zwischen Primärflächen

Die Ausgangslage ist dieselbe wie im letzten Kapitel. Das Dreiecksnetz wurde segmentiert und die einzelnen Segmente parametrisiert und durch jeweils eine C^2 -stetige B-Spline-Fläche approximiert.

Ziel ist es nun, eine C^2 -stetige, polynomielle Gesamtfläche zu berechnen, die die Form des Dreiecksnetzes nachempfunden.

4.1 Grundprinzip des Verfahrens

Die C^2 -stetige Gesamtfläche wird realisiert, indem die approximierenden B-Spline-Flächen, sogenannte Primärflächen, in den Bereichen, in denen sie sich nahe kommen oder zusammenstoßen, glatt, das heißt C^2 -stetig, ineinander übergeblendet werden.

Ein äußerst wichtiger, im Folgenden häufig auftretender Begriff ist der des **Blending-Bereichs**. Als Blending-Bereiche werden die Bereiche bezeichnet, in denen sich zwei oder mehr B-Spline-Flächen nahe kommen. Hierbei wird nicht zwischen dem Parametergebiet der B-Spline-Flächen und dem \mathbb{R}^3 unterschieden. Was jeweils gemeint ist, ist aus dem entsprechenden Kontext zu erkennen.

Abseits der Blending-Bereiche bilden die approximierenden B-Spline-Flächen die Oberfläche des Objekts. Diese müssen entlang der inneren Ränder der Blending-Bereiche getrimmt werden. Abbildung 4.1 zeigt ein Beispiel einer rekonstruierten, C^2 -stetigen Fläche. Getrimmte B-Spline-Flächen werden darin blau dargestellt.

In den Blending-Bereichen werden sogenannte Sekundär- oder Blending-Flächen berechnet, die einen C^2 -stetigen Übergang zwischen den getrimmten B-Spline-Flächen schaffen. Es gibt zwei Arten von Blending-Flächen, **Blending-Streifen** und **N -flächige Blends**. Blending-Streifen stellen eine Verbindung zwischen zwei getrimmten B-Spline-Flächen her, während

N -flächige Blends $N \geq 3$ B-Spline-Flächen ineinander überblenden. Blending-Streifen sind in Abbildung 4.1 rot, N -flächige Blends gelb dargestellt.

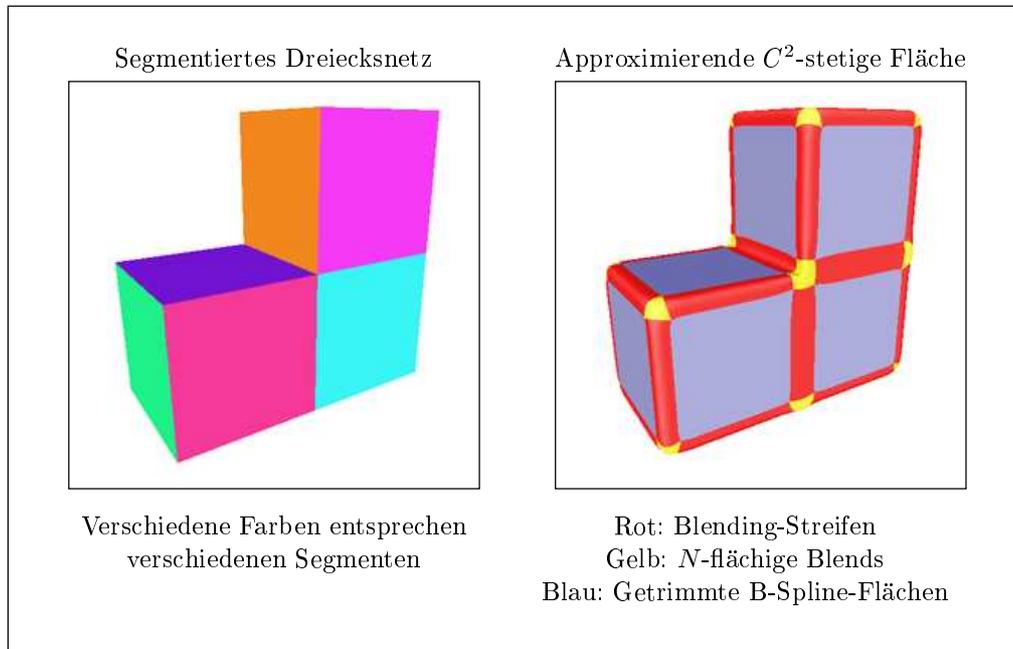


Abbildung 4.1: Eine rekonstruierte C^2 -stetige Fläche

Um dieses Grundprinzip leichter zu verstehen, werden zunächst zwei einfache Beispiele betrachtet, das Überblenden zweier B-Spline-Flächen und die C^2 -stetige Rekonstruktion eines deformierten Tetraeders.

4.1.1 C^2 -stetiges Überblenden zweier B-Spline-Flächen

Gegeben sind die beiden B-Spline-Flächen \mathbf{F}^\downarrow (die rote Fläche in Abbildung 4.2) und \mathbf{F}^\uparrow (die grüne Fläche in Abbildung 4.2). Die gesuchte C^2 -stetige Gesamtfläche wird sich aus drei Teilflächen zusammensetzen:

Ein Blending-Streifen: Im Blending-Bereich werden die B-Spline-Flächen durch einen Blending-Streifen ersetzt (die gelbe Fläche in Abbildung 4.2), der einen C^2 -stetigen Übergang zwischen diesen Flächen schafft.

Zwei getrimmte B-Spline-Flächen: Außerhalb des Blending-Bereichs bleiben die B-Spline-Flächen unverändert. Um die beiden verbleibenden Teile der B-Spline-Flächen mathematisch zu beschreiben, müssen geeignete Trimming-Kurven berechnet werden.

Der Blending-Streifen entsteht dadurch, dass die beiden B-Spline-Flächen mit Gewichten, den **Blending-Funktionen**, multipliziert und anschließend addiert werden.

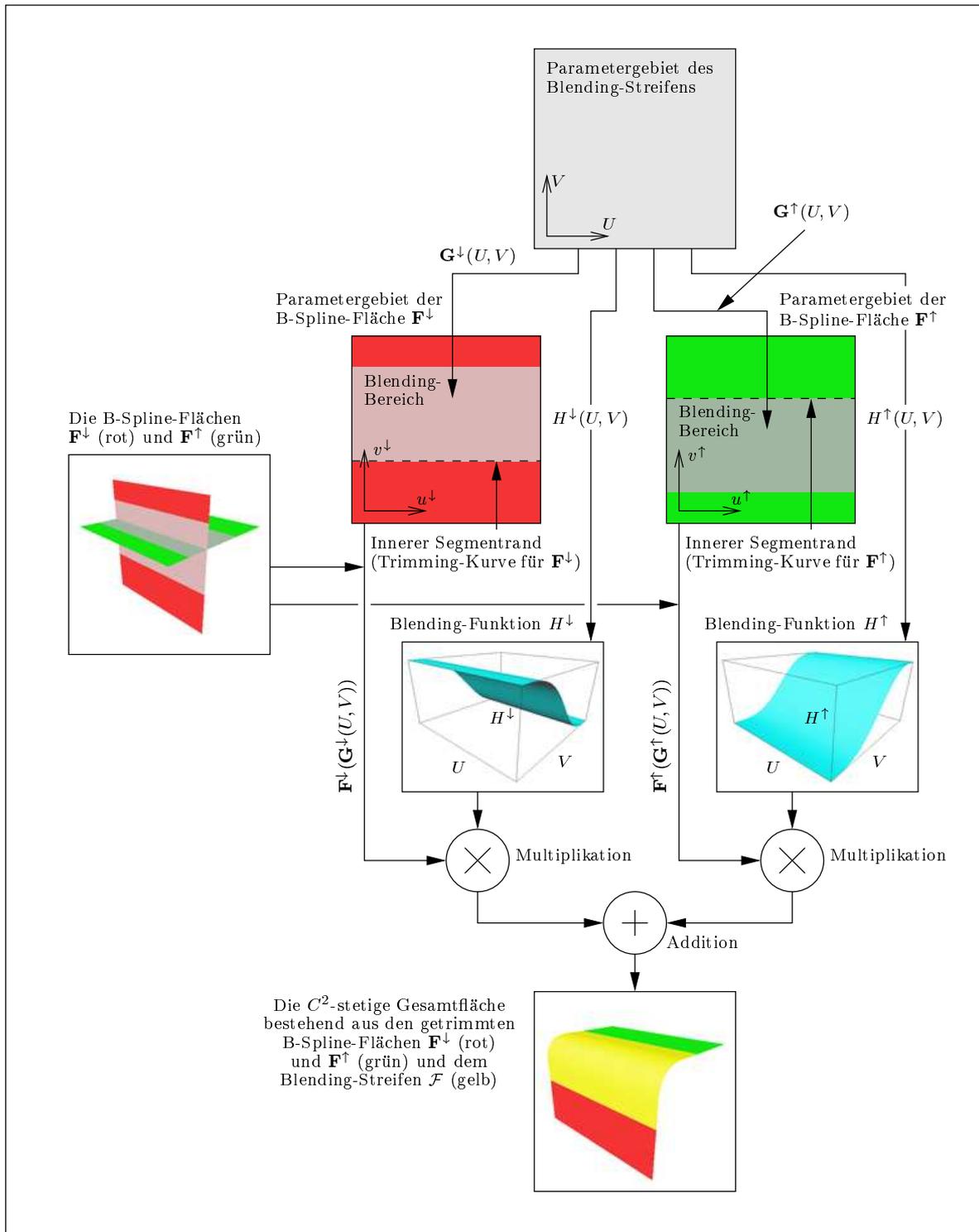


Abbildung 4.2: C^2 -stetiges Überblenden zweier B-Spline-Flächen

Dazu ist es notwendig Parametertransformationen zu finden, die eine Verbindung zwischen den voneinander unabhängigen Parametergebieten $D^{(u^\downarrow, v^\downarrow)}$ und $D^{(u^\uparrow, v^\uparrow)}$ der beiden B-Spline-Flächen \mathbf{F}^\downarrow und \mathbf{F}^\uparrow herstellen. Dies wird durch die beiden Transformationen $\mathbf{G}^\downarrow : D^{(U, V)} \rightarrow D^{(u^\downarrow, v^\downarrow)}$ und $\mathbf{G}^\uparrow : D^{(U, V)} \rightarrow D^{(u^\uparrow, v^\uparrow)}$ realisiert, die das quadratische Parametergebiet $D^{(U, V)}$ des Blending-Streifens (das graue Rechteck in Abbildung 4.2) in die Blending-Bereiche der Parametergebiete $D^{(u^\downarrow, v^\downarrow)}$ (der hellrote Bereich im roten Rechteck in Abbildung 4.2) und $D^{(u^\uparrow, v^\uparrow)}$ (der hellgrüne Bereich im grünen Rechteck in Abbildung 4.2) abbilden. Wie die Blending-Bereiche in den Parametergebieten der B-Spline-Flächen identifiziert werden können und die beiden Parametertransformationen zu wählen sind, wird in Abschnitt 4.4 erläutert. An dieser Stelle sei nur erwähnt, dass die Konstruktion der Parametertransformationen sicherlich zu den schwierigsten Aspekten des hier präsentierten Verfahrens zählt.

Bei den Blending-Funktionen $H^\downarrow : D^{(U, V)} \rightarrow \mathbb{R}$ und $H^\uparrow : D^{(U, V)} \rightarrow \mathbb{R}$ (die türkisen Höhenfelder in Abbildung 4.2), mit denen die B-Spline-Flächen multipliziert werden, handelt es sich um skalare Funktionen, die Werte zwischen 0 und 1 annehmen. $H^\downarrow = 1$ gilt an der Kante, an der der Blending-Streifen in \mathbf{F}^\downarrow übergeht, $H^\downarrow = 0$ an der Kante, an der der Blending-Streifen in \mathbf{F}^\uparrow übergeht. Für H^\uparrow gilt das Umgekehrte. Eine Reihe von weiteren Bedingungen (Realisierung einer C^2 -stetigen Gesamtfläche, keine Bevorzugung einer der beiden Flächen, affine Invarianz des Verfahrens) legt die Blending-Funktionen eindeutig fest. Die Berechnung dieser Blending-Funktionen wird in Abschnitt 4.3 besprochen.

Fügt man B-Spline-Flächen, Parametertransformationen und Blending-Funktionen zusammen, erhält man den Blending-Streifen

$$\mathcal{F}(U, V) = H^\downarrow(U, V) \cdot \mathbf{F}^\downarrow(\mathbf{G}^\downarrow(U, V)) + H^\uparrow(U, V) \cdot \mathbf{F}^\uparrow(\mathbf{G}^\uparrow(U, V)) \quad .$$

Die Trimming-Kurven der B-Spline-Flächen entsprechen den inneren Rändern der Blending-Bereiche in den entsprechenden Parametergebieten (die gestrichelten Linien im roten beziehungsweise grünen Rechteck in Abbildung 4.2).

4.1.2 C^2 -stetige Rekonstruktion geschlossener Flächen

In diesem Unterabschnitt wird das Grundprinzip für die C^2 -stetige Rekonstruktion einer geschlossenen Fläche anhand eines einfachen Beispiels erläutert. Betrachtet wird ein leicht deformierter Tetraeder, dessen vier Seiten jeweils ein Segment bilden (Abbildung 4.3).

Das eben betrachtete Überblenden zweier B-Spline-Flächen kommt entlang den Grenzen genau zweier Segmente zur Anwendung. Wie im weiteren Verlauf dieses Kapitels zu sehen sein wird, ist dies ein relativ einfach zu realisierender Fall. Die dafür verwendeten Blending-Streifen sind die am häufigsten vorkommenden Blending-Flächen.

In fast allen segmentierten Dreiecksnetzen gibt es aber auch Punkte an denen drei oder mehr Segmente zusammenstoßen (beim hier betrachteten Tetraeder stoßen an den vier Ecken jeweils drei Segmente zusammen). Für diese Bereiche muss eine Methode entwickelt werden,

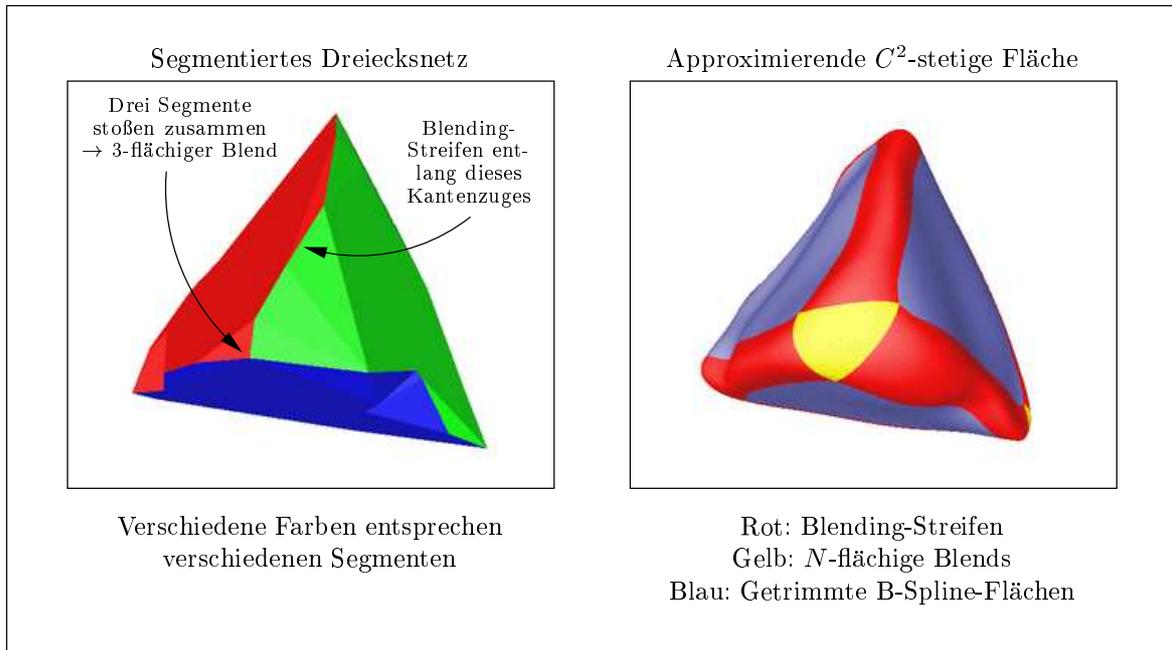


Abbildung 4.3: Segmentiertes Dreiecksnetz und rekonstruierte Oberfläche eines Tetraeders

mit der die dazugehörigen $N \geq 3$ B-Spline-Flächen überblendet werden können. Obwohl die dafür eingesetzten N -flächigen Blends auf demselben Prinzip basieren, sind sie wesentlich schwieriger zu berechnen, als die relativ harmlosen Blending-Streifen. Ihnen ist daher der Hauptteil dieses Kapitels gewidmet.

Wie bereits weiter oben erwähnt, ist jedem Segment eine approximierende B-Spline-Fläche zugeordnet. Die schwierigste Aufgabe besteht darin, die Blending-Bereiche in den Parametergebieten aller B-Spline-Flächen festzulegen. Dies geschieht durch Angabe von Parametertransformationen, die die Parametergebiete der Blending-Streifen und der N -flächigen Blends in die Parametergebiete der B-Spline-Flächen abbilden. Einen ersten Anhaltspunkt dafür bieten die Parameterwerte der Randpunkte der Segmente, die, wie in Abschnitt 2.3 erläutert, von den zugehörigen B-Spline-Flächen approximiert oder interpoliert werden. Die Berechnung dieser Blending-Bereiche in Form von Parametertransformationen wird in Abschnitt 4.4 beschrieben. Das Ergebnis ist jeweils ein geschlossener Schlauch im Parametergebiet einer jeden B-Spline-Fläche, in den nahtlos die Parametergebiete der Blending-Streifen und der N -flächigen Blends abgebildet werden. Abbildung 4.4 zeigt die Parametergebiete der vier approximierenden B-Spline-Flächen des betrachteten Tetraeders. Die Blending-Bereiche sind heller gefärbt als die Segment-Innenbereiche.

Die resultierende C^2 -stetige Gesamtfläche setzt sich aus drei Typen von Teilflächen zusammen, die im Folgenden kurz beschrieben werden.

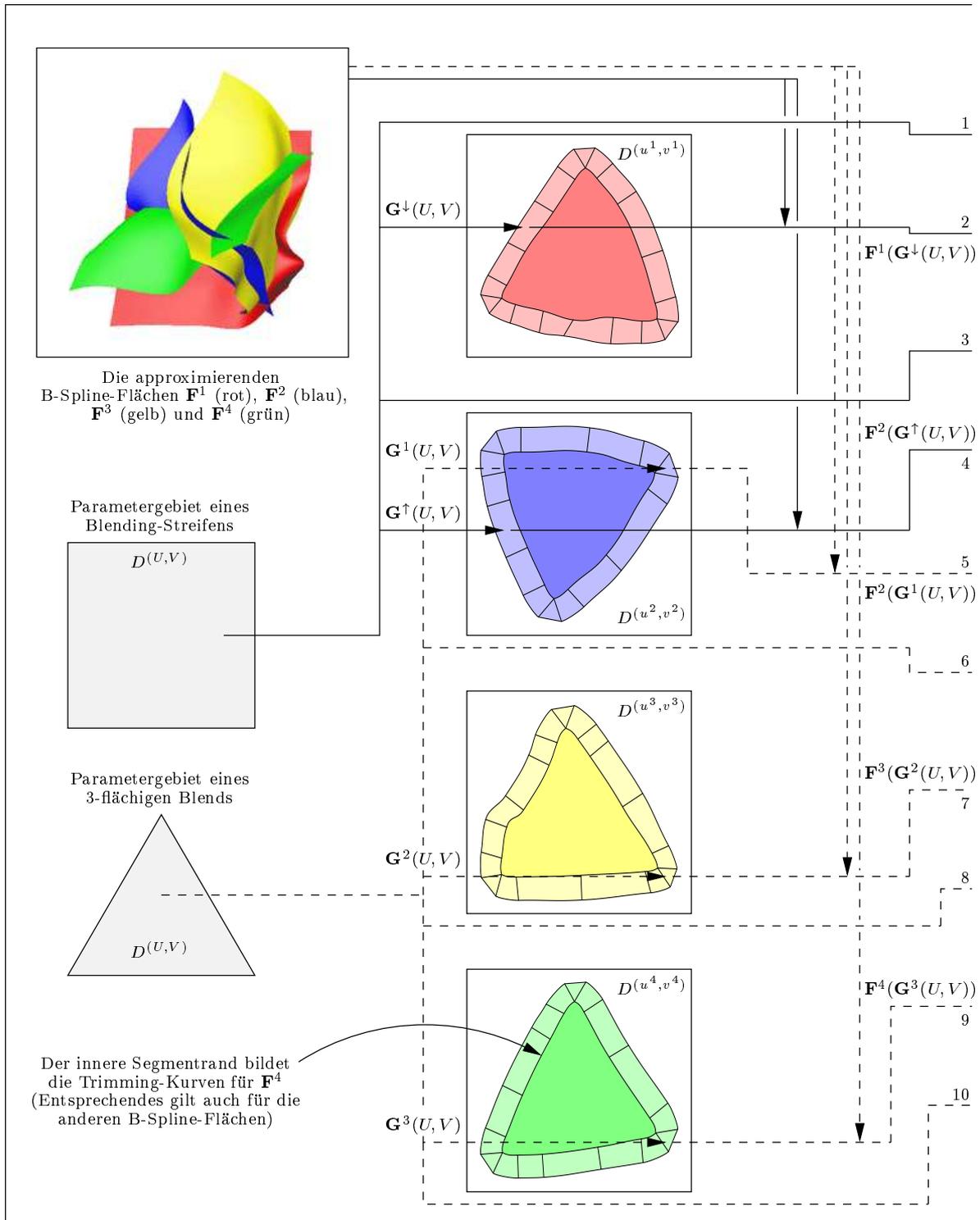


Abbildung 4.4: C^2 -stetige Rekonstruktion eines deformierten Tetraeders, linker Teil

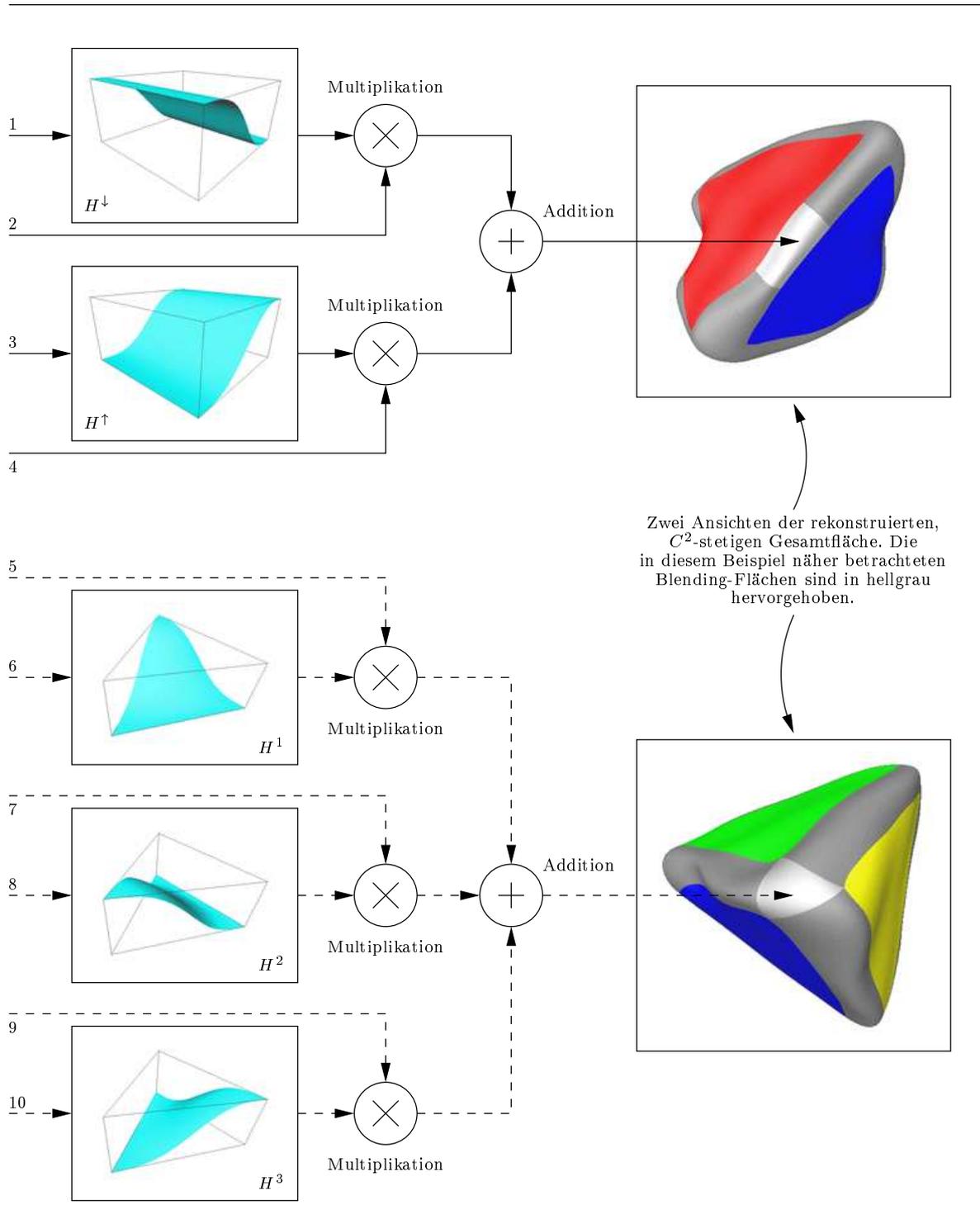


Abbildung 4.5: C^2 -stetige Rekonstruktion eines deformierten Tetraeders, rechter Teil

Blending-Streifen: Blending-Streifen bilden einen C^2 -stetigen Übergang zwischen zwei B-Spline-Flächen \mathbf{F}^\downarrow und \mathbf{F}^\uparrow . Sie besitzen das quadratische Parametergebiet $D^{(U,V)} = [0, 1] \times [0, 1]$. Blending Streifen haben die Form

$$\mathcal{F}(U, V) = H^\downarrow(U, V) \cdot \mathbf{F}^\downarrow(\mathbf{G}^\downarrow(U, V)) + H^\uparrow(U, V) \cdot \mathbf{F}^\uparrow(\mathbf{G}^\uparrow(U, V)) \quad .$$

H^\downarrow und H^\uparrow sind geeignet gewählte Blending-Funktionen, \mathbf{G}^\downarrow und \mathbf{G}^\uparrow die bereits angesprochenen Parametertransformationen. Die Abbildungen 4.4 und 4.5 zeigen den Aufbau eines Blending-Streifens des betrachteten Tetraeders (durchgezogene Pfeile).

N -flächige Blends: N -flächige Blends bilden einen C^2 -stetigen Übergang zwischen N B-Spline-Flächen $\mathbf{F}^1, \dots, \mathbf{F}^N$. Ihr Parametergebiet besitzt die Form eines regulären N -Ecks mit Seitenlänge 1. N -flächige Blends haben die Form

$$\mathcal{F}(U, V) = \sum_{i=1}^N H^{N,i}(U, V) \cdot \mathbf{F}^i(\mathbf{G}^i(U, V)) \quad .$$

Die $H^{N,i}$ sind geeignet gewählte Blending-Funktionen, die \mathbf{G}^i die bereits angesprochenen Parametertransformationen. Die Abbildungen 4.4 und 4.5 zeigen den Aufbau eines 3-flächigen Blends des betrachteten Tetraeders (gestrichelte Pfeile).

Getrimmte B-Spline-Flächen: Im Segmentinneren bilden die approximierenden B-Spline-Flächen Teile der Gesamtfläche. Die Trimming-Kurven einer B-Spline-Fläche sind gegeben durch den inneren Rand des zugehörigen Blending-Bereichs. Dieser wird durch die Parametertransformationen der Blending-Streifen festgelegt (Abbildung 4.4).

Nach diesen die Grundzüge des Verfahrens vermittelnden Beispielen werden in den folgenden Kapiteln die mathematischen Details diskutiert. Zuerst werden Bedingungen hergeleitet, welche für eine C^2 -stetige Gesamtfläche notwendig sind, dann wird die Berechnung der Blending-Funktionen und der Parametertransformationen vorgestellt.

4.2 Notwendige Bedingungen für eine C^2 -stetige Gesamtfläche

Die Fragestellung dieses Abschnitts lautet: Welche Bedingungen müssen die Blending-Funktionen H^\downarrow , H^\uparrow und $H^{N,i}$ und die Parametertransformationen \mathbf{G}^\downarrow , \mathbf{G}^\uparrow und \mathbf{G}^i erfüllen, damit die rekonstruierte Fläche C^2 -stetig ist?

Die Kenntnis dieser Bedingungen ist für die spätere Konstruktion von H^\downarrow , H^\uparrow , $H^{N,i}$, \mathbf{G}^\downarrow , \mathbf{G}^\uparrow und \mathbf{G}^i erforderlich. Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Blending-Funktionen H^\downarrow , H^\uparrow und $H^{N,i}$ nur einmalig berechnet werden und für alle Blending-Flächen Anwendung finden, jede Blending-Fläche dagegen ihre eigenen Parametertransformationen \mathbf{G}^\downarrow und \mathbf{G}^\uparrow beziehungsweise \mathbf{G}^i besitzt, die speziell für sie konstruiert wurden.

Eine Möglichkeit, die C^2 -Stetigkeit einer geschlossenen Fläche \mathcal{G} nachzuweisen, besteht darin, für jeden Punkt $\mathcal{G}_0 \in \mathcal{G}$ mindestens eine Parameterdarstellung $\mathcal{G}(U, V)$ anzugeben, für die gilt:

- Es existiert ein (U_0, V_0) mit der Eigenschaft $\mathcal{G}(U_0, V_0) = \mathcal{G}_0$.
- Es existiert eine Umgebung \mathcal{U}_0 von (U_0, V_0) innerhalb der $\mathcal{G}(U, V)$ C^2 -stetig ist.
- $\mathcal{G}(\mathcal{U}_0)$ ist eine Teilmenge der Gesamtfläche \mathcal{G} .

Eine derartige Parameterdarstellung $\mathcal{G}(U, V)$ und das dazugehörige Parametergebiet $D^{(U,V)}$ wird auch als Karte bezeichnet¹. Selbst bei sehr einfachen geschlossenen Flächen, zum Beispiel einer Kugel, ist eine Karte nicht ausreichend, um jedem Punkt eine C^2 -stetige Parameterdarstellung zuzuweisen. Für das hier betrachtete Problem wird sogar eine Vielzahl verschiedener Karten verwendet.

Um alle Bedingungen für eine C^2 -stetige Gesamtfläche herzuleiten, werden die Teilflächen zuerst isoliert betrachtet. Im Anschluss daran werden die Übergänge zwischen diesen Teilflächen analysiert.

4.2.1 Isoliertes Betrachten der Teilflächen

In der folgenden isolierten Betrachtung der Teilflächen werden alle Punkte der Gesamtfläche auf C^2 -Stetigkeit untersucht, die nicht auf der Übergangslinie zweier Teilflächen liegen. Im Anschluss daran müssen also nur noch die Übergänge zwischen diesen Teilflächen betrachtet werden.

Blending-Streifen

Ein Blending-Streifen zwischen zwei B-Spline-Flächen \mathbf{F}^\downarrow und \mathbf{F}^\uparrow hat die Form

$$\mathcal{F}(U, V) = H^\downarrow(U, V) \cdot \mathbf{F}^\downarrow(\mathbf{G}^\downarrow(U, V)) + H^\uparrow(U, V) \cdot \mathbf{F}^\uparrow(\mathbf{G}^\uparrow(U, V)) \quad .$$

Daraus folgt, dass $\mathcal{F}(U, V)$ genau dann C^2 -stetig ist, wenn die Funktionen H^\downarrow , H^\uparrow , \mathbf{G}^\downarrow und \mathbf{G}^\uparrow C^2 -stetig sind.

N -flächige Blends

Ein N -flächiger Blend zwischen den B-Spline-Flächen $\mathbf{F}^1, \dots, \mathbf{F}^N$ hat die Form

¹Die Bezeichnung Karte ist nicht ganz korrekt, da in der Differentialgeometrie zusätzlich noch die Bijektivität der Parameterdarstellung $\mathcal{G}(U, V)$ gefordert wird. Das hier präsentierte Verfahren liefert in den meisten Fällen bijektive Parameterdarstellungen, kann die Bijektivität aber nicht in allen Fällen garantieren. Die resultierende Gesamtfläche \mathcal{G} ist daher nicht zwingend eine C^2 -Mannigfaltigkeit, wohl aber eine C^2 -stetige Fläche.

$$\mathcal{F}(U, V) = \sum_{i=1}^N H^{N,i}(U, V) \cdot \mathbf{F}^i(\mathbf{G}^i(U, V)) \quad .$$

Daraus folgt, dass $\mathcal{F}(U, V)$ genau dann C^2 -stetig ist, wenn die Funktionen H^i und \mathbf{G}^i C^2 -stetig sind.

Getrimmte B-Spline-Flächen

Wie in Abschnitt 2.3 erläutert, handelt es sich bei den approximierenden B-Spline-Flächen um kubische B-Spline-Flächen über uniformen Knotenvektoren. Es ist allgemein bekannt, dass derartige Flächen C^2 -stetig sind. Es treten weder Blending-Funktionen noch Parametertransformationen auf.

4.2.2 Übergänge zwischen zwei Teilflächen

Da bei den im Folgenden untersuchten Karten die Parametergebiete der Blending-Flächen eine entscheidende Rolle spielen, soll noch einmal kurz erwähnt werden, wie diese Parametergebiete aussehen und welche Überlegungen zu einer derartigen Wahl geführt haben.

Das Parametergebiet $D^{(U,V)}$ eines jeden Blending-Streifens ist ein axial ausgerichtetes Quadrat, nämlich $D^{(U,V)} = [0, 1] \times [0, 1]$. Einerseits ist ein solches Parametergebiet einfach zu handhaben, andererseits muss das Parametergebiet ohnehin eine Linie aufweisen, bezüglich derer Spiegelsymmetrie vorliegt (beim Quadrat ist das erfüllt; es gibt sogar vier solche Linien). Würde keine solche Linie existieren, würde automatisch eine der beiden ineinander überzublendenden B-Spline-Flächen bevorzugt werden.

Als Parametergebiete $D^{(U,V)}$ der N -flächigen Blends wurden reguläre N -Ecke mit Seitenlänge 1 gewählt, da diese Parametergebiete einen Punkt aufweisen müssen, bezüglich dem N -zählige Rotationssymmetrie vorliegt (das reguläre N -Eck ist eine der einfachsten geometrischen Figuren, bei der diese Eigenschaft erfüllt ist). Würde kein solcher Punkt existieren, würden automatisch einige der ineinander überzublendenden B-Spline-Flächen bevorzugt werden.

Übergänge zwischen Blending-Streifen und getrimmten B-Spline-Flächen

Für den Übergang zwischen einem Blending-Streifen \mathcal{F} und den beiden angrenzenden, getrimmten B-Spline-Flächen \mathbf{F}^\downarrow und \mathbf{F}^\uparrow wird die in Abbildung 4.6 gezeigte Topologie betrachtet.

Die verwendete Karte ist in Abbildung 4.7 zu sehen.

Der Blending-Streifen, bei dem keine Umparametrisierung vorgenommen wird, hat nach wie vor die Form

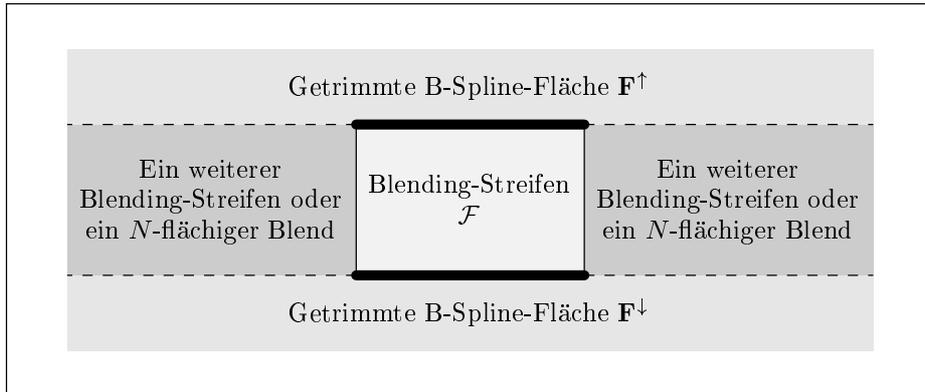


Abbildung 4.6: Topologie beim Übergang Blending-Streifen \leftrightarrow getrimmte B-Spline-Fläche

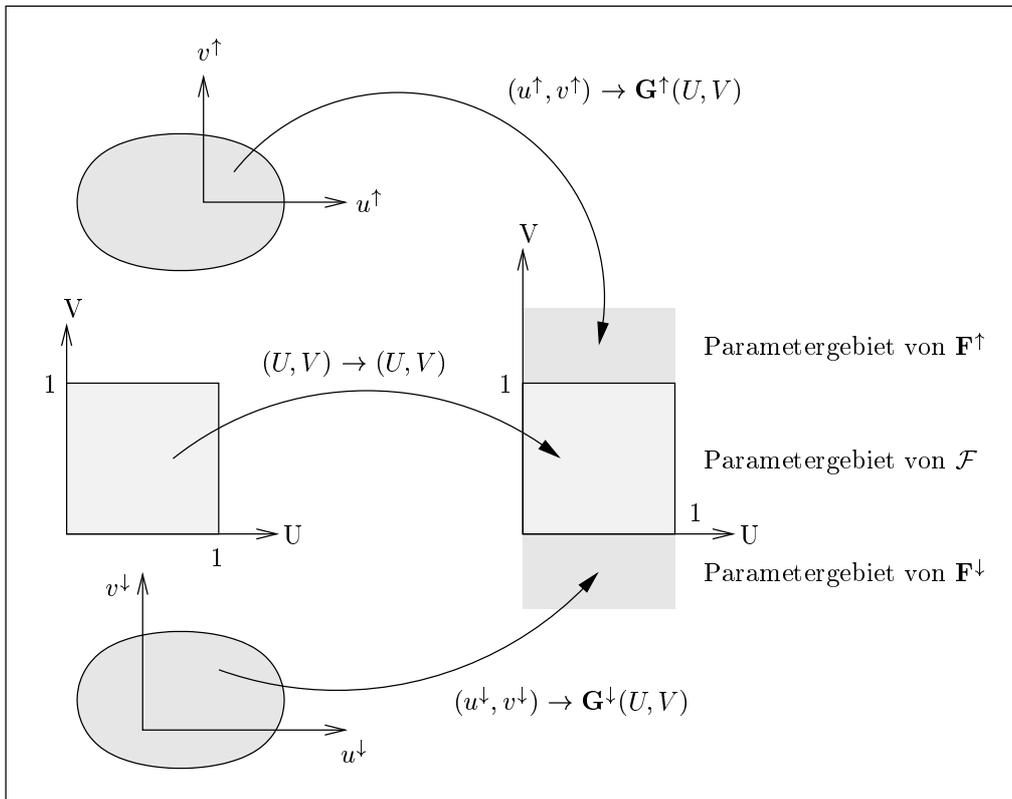


Abbildung 4.7: Karte beim Übergang Blending-Streifen \leftrightarrow getrimmte B-Spline-Fläche

$$\mathcal{F}(U, V) = H^\downarrow(U, V) \cdot \mathbf{F}^\downarrow(\mathbf{G}^\downarrow(U, V)) + H^\uparrow(U, V) \cdot \mathbf{F}^\uparrow(\mathbf{G}^\uparrow(U, V)) \quad . \quad (4.1)$$

Für die getrimmten B-Spline-Flächen ergibt sich nach den der Karte entsprechenden Umpa-

rametrisierungen $(u^\downarrow, v^\downarrow) \rightarrow \mathbf{G}^\downarrow(U, V)$ und $(u^\uparrow, v^\uparrow) \rightarrow \mathbf{G}^\uparrow(U, V)$

$$\mathbf{F}^\downarrow(U, V) = \mathbf{F}^\downarrow(\mathbf{G}^\downarrow(U, V)) \quad (4.2)$$

$$\mathbf{F}^\uparrow(U, V) = \mathbf{F}^\uparrow(\mathbf{G}^\uparrow(U, V)) \quad (4.3)$$

Im Folgenden wird der Übergang zwischen \mathcal{F} und \mathbf{F}^\downarrow (die untere fett gezeichnete Kante in Abbildung 4.6) betrachtet. Für einen C^2 -stetigen Übergang müssen die nullten, ersten und zweiten Ableitungen dieser beiden Flächen entlang der Kante $(U, 0)$, $U \in [0, 1]$, übereinstimmen. Ableiten von (4.1) und (4.2), Gleichsetzen an dieser Kante und anschließender Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} H^\downarrow(U, 0) &= \delta_{\alpha,0} \delta_{\beta,0} \quad , \quad \alpha = 0, \dots, 2 \quad , \quad \beta = 0, \dots, 2 - \alpha \\ \frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} H^\uparrow(U, 0) &= 0 \quad , \quad \alpha = 0, \dots, 2 \quad , \quad \beta = 0, \dots, 2 - \alpha \quad . \end{aligned}$$

Dies kann vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} \text{(H1)} \quad H^\downarrow(U, 0) &= 1 & \text{(H7)} \quad H^\uparrow(U, 0) &= 0 \\ \text{(H2)} \quad H_{V^\downarrow}^\downarrow(U, 0) &= 0 & \text{(H8)} \quad H_{V^\uparrow}^\uparrow(U, 0) &= 0 \\ \text{(H3)} \quad H_{VV^\downarrow}^\downarrow(U, 0) &= 0 & \text{(H9)} \quad H_{VV^\uparrow}^\uparrow(U, 0) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Ähnliche Überlegungen für den Übergang zwischen \mathcal{F} und \mathbf{F}^\uparrow (die obere fett gezeichnete Kante in Abbildung 4.6) führen auf

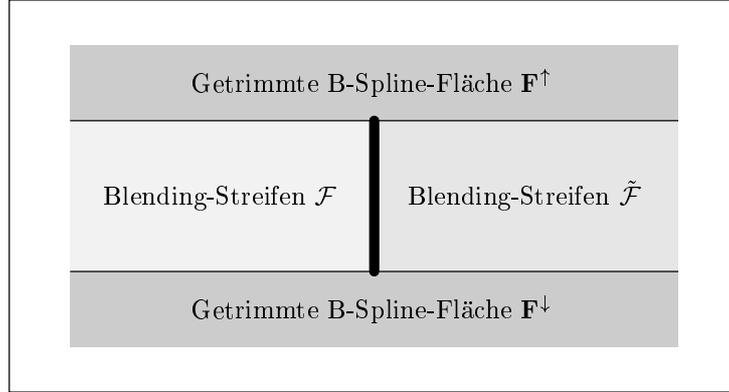
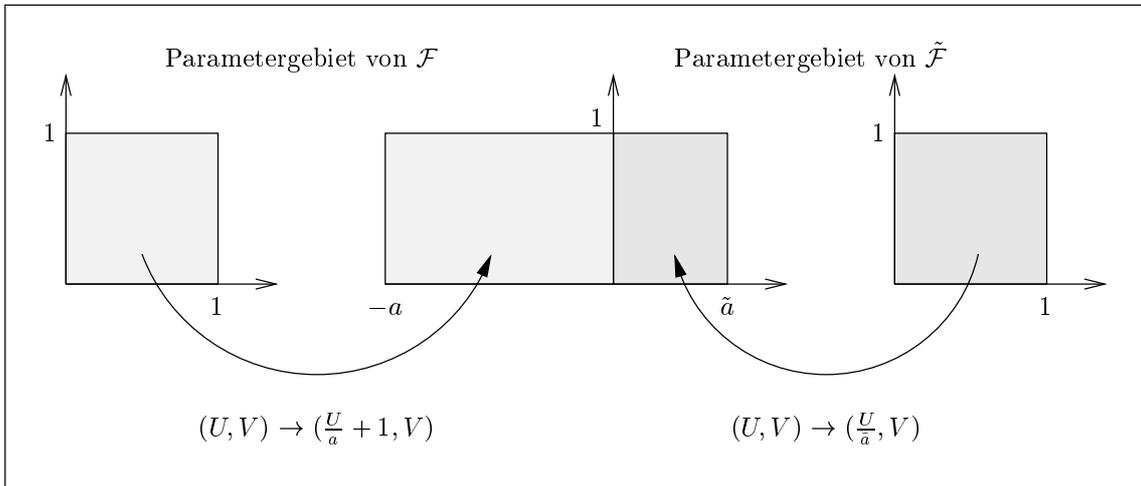
$$\begin{aligned} \text{(H4)} \quad H^\downarrow(U, 1) &= 0 & \text{(H10)} \quad H^\uparrow(U, 1) &= 1 \\ \text{(H5)} \quad H_{V^\downarrow}^\downarrow(U, 1) &= 0 & \text{(H11)} \quad H_{V^\uparrow}^\uparrow(U, 1) &= 0 \\ \text{(H6)} \quad H_{VV^\downarrow}^\downarrow(U, 1) &= 0 & \text{(H12)} \quad H_{VV^\uparrow}^\uparrow(U, 1) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Übergänge zwischen zwei Blending-Streifen

Für den Übergang zwischen zwei Blending-Streifen \mathcal{F} und $\tilde{\mathcal{F}}$ wird die in Abbildung 4.8 gezeigte Topologie betrachtet.

Die verwendete Karte ist in Abbildung 4.9 zu sehen.

Aufgrund der in Unterabschnitt 4.3.1 geforderten Spiegelsymmetrie und Translationssymmetrie der Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow , müssen Karten, bei denen die Parametergebiete


 Abbildung 4.8: Topologie beim Übergang Blending-Streifen \leftrightarrow Blending-Streifen

 Abbildung 4.9: Karte beim Übergang Blending-Streifen \leftrightarrow Blending-Streifen

gespiegelt oder um 180° gedreht wurden nicht betrachtet werden. Durch derartige Übergänge ergeben sich keine neuen Bedingungen.

Die beiden der Karte entsprechenden Umparametrisierungen $(U, V) \rightarrow (\frac{U}{a} + 1, V)$ und $(U, V) \rightarrow (\frac{U}{\tilde{a}}, V)$ führen auf eine neue Form der Blending Streifen,

$$\mathcal{F}(U, V) = H^\downarrow\left(\frac{U}{a} + 1, V\right) \cdot \mathbf{F}^\downarrow\left(\mathbf{G}^\downarrow\left(\frac{U}{a} + 1, V\right)\right) + H^\uparrow\left(\frac{U}{a} + 1, V\right) \cdot \mathbf{F}^\uparrow\left(\mathbf{G}^\uparrow\left(\frac{U}{a} + 1, V\right)\right)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(U, V) = H^\downarrow\left(\frac{U}{\tilde{a}}, V\right) \cdot \mathbf{F}^\downarrow\left(\tilde{\mathbf{G}}^\downarrow\left(\frac{U}{\tilde{a}}, V\right)\right) + H^\uparrow\left(\frac{U}{\tilde{a}}, V\right) \cdot \mathbf{F}^\uparrow\left(\tilde{\mathbf{G}}^\uparrow\left(\frac{U}{\tilde{a}}, V\right)\right) \quad .$$

Dabei sind a und \tilde{a} gewonnene Freiheitsgrade, deren Bedeutung erst bei der Konstruktion der Parametertransformationen in Unterabschnitt 4.4.3 zu Tage tritt. Ableiten dieser Bezie-

hungen, Gleichsetzen an der Übergangslinie $(0, V)$, $V \in [0, 1]$, und anschließender Koeffizientenvergleich liefert eine Reihe von Bedingungen für eine C^2 -stetige Verbindung. Für die Blending-Funktionen muss

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} H^i(1, V) \frac{1}{a^\alpha} = \frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} H^i(0, V) \frac{1}{\tilde{a}^\alpha} \quad , \quad \alpha = 0, \dots, 2 \quad ,$$

$$\beta = 0, \dots, 2 - \alpha \quad , \quad i = \downarrow, \uparrow$$

gelten. Diese Bedingungen lassen sich zu

$$(H13) \quad H^i(1, V) = H^i(0, V) \quad , \quad i = \downarrow, \uparrow$$

$$(H14) \quad H^i_U(1, V) = H^i_U(0, V) = 0 \quad , \quad i = \downarrow, \uparrow$$

$$(H15) \quad H^i_{UU}(1, V) = H^i_{UU}(0, V) = 0 \quad , \quad i = \downarrow, \uparrow$$

vereinfachen. Die Forderungen an die Parametertransformationen lauten

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} \mathbf{G}^i(1, V) \frac{1}{a^\alpha} = \frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} \tilde{\mathbf{G}}^i(0, V) \frac{1}{\tilde{a}^\alpha} \quad , \quad \alpha = 0, \dots, 2 \quad ,$$

$$\beta = 0, \dots, 2 - \alpha \quad , \quad i = \downarrow, \uparrow \quad .$$

Diese können zu

$$(G1) \quad \mathbf{G}^i(1, V) = \tilde{\mathbf{G}}^i(0, V) \quad , \quad i = \downarrow, \uparrow$$

$$(G2) \quad \mathbf{G}^i_U(1, V) \frac{1}{a} = \tilde{\mathbf{G}}^i_U(0, V) \frac{1}{\tilde{a}} \quad , \quad i = \downarrow, \uparrow$$

$$(G3) \quad \mathbf{G}^i_{UU}(1, V) \frac{1}{a^2} = \tilde{\mathbf{G}}^i_{UU}(0, V) \frac{1}{\tilde{a}^2} \quad , \quad i = \downarrow, \uparrow$$

$$(G4) \quad \mathbf{G}^i_{UV}(1, V) \frac{1}{a} = \tilde{\mathbf{G}}^i_{UV}(0, V) \frac{1}{\tilde{a}} \quad , \quad i = \downarrow, \uparrow$$

vereinfacht werden.

Übergänge zwischen Blending-Streifen und N -flächigen Blends

Bei den Übergängen zwischen einem N -flächigen Blend \mathcal{F} und den angrenzenden N Blending-Streifen $\mathcal{F}^{k,j}$ wird die in Abbildung 4.10 gezeigte Topologie betrachtet.

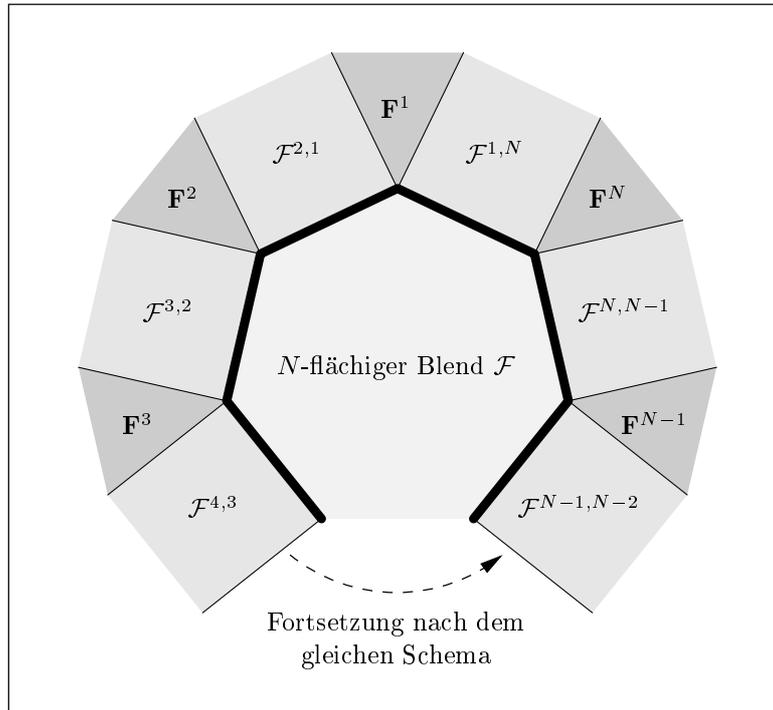


Abbildung 4.10: Topologie beim Übergang Blending-Streifen \leftrightarrow N-flächiger Blend

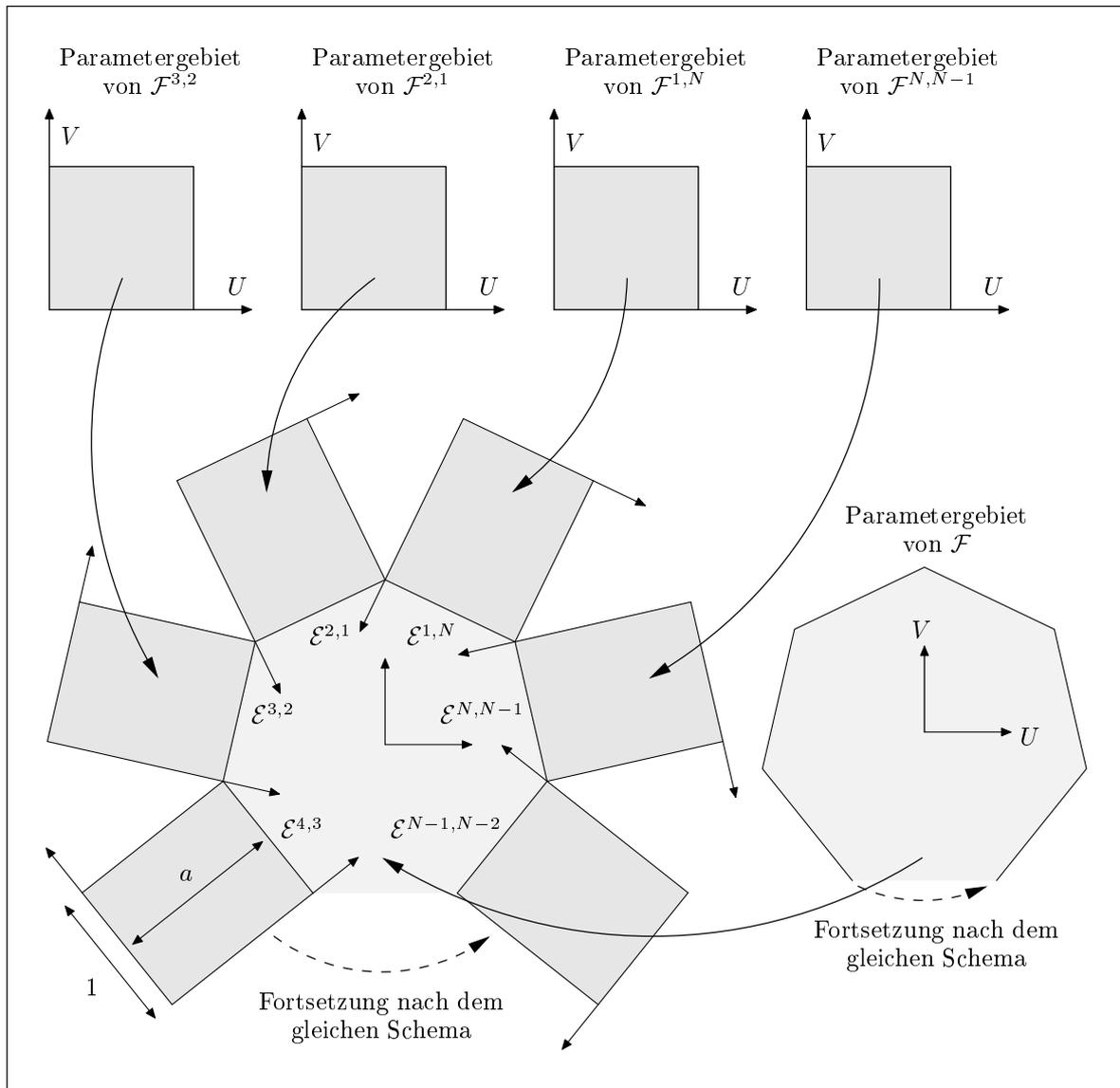
Die verwendete Karte ist in Abbildung 4.11 zu sehen.

Aufgrund der in Unterabschnitt 4.3.1 geforderten Spiegelsymmetrie und Translationssymmetrie der Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow und der in Unterabschnitt 4.3.2 geforderten Spiegelsymmetrie und Rotationssymmetrie der Blending-Funktionen H^i , müssen Karten, bei denen die Parametergebiete gespiegelt oder gedreht wurden, nicht betrachtet werden. Durch derartige Übergänge ergeben sich keine neuen Bedingungen.

Im Gegensatz zum Vorgehen in den beiden vorangegangenen Abschnitten, in denen die Parametergebiete der Teilflächen in ein gemeinsames Parametergebiet abgebildet wurden, behalten sowohl der N-flächige Blend als auch die angrenzenden Blending-Streifen lokale Koordinatensysteme. Die einzige stattfindende Umparametrisierung ist eine Skalierung der Parametergebiete der Blending-Streifen in U -Richtung mit dem für alle Streifen gleichen Faktor a . a ist ein Freiheitsgrad, dessen Bedeutung erst bei der Konstruktion der Parametertransformationen in Unterabschnitt 4.4.2 zu Tage tritt.

Um die Ableitungen an den Übergangslinien zwischen zwei verschiedenen Koordinatensystemen sinnvoll vergleichen zu können, ist es notwendig, den Begriff der Richtungsableitung einzuführen. Die Richtungsableitung einer Funktion \mathbf{F} am Punkt (U_0, V_0) in Richtung \mathbf{e} , $\|\mathbf{e}\| = 1$, lautet

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \mathbf{F}(U_0, V_0) = \mathbf{F}_{\mathbf{e}}(U_0, V_0) = \langle \mathbf{grad} \mathbf{F}(U_0, V_0), \mathbf{e} \rangle .$$

Abbildung 4.11: Karte beim Übergang Blending-Streifen \leftrightarrow N-flächiger Blend

Die Verwendung von Richtungsableitungen an Stelle eines globalen Koordinatensystems wird das Aufstellen und spätere Anwenden von Bedingungen an die Blending-Funktionen und die Parametertransformationen stark vereinfachen.

Der N -flächige Blend hat die Form

$$\mathcal{F}(U, V) = \sum_{i=1}^N H^{N,i}(U, V) \cdot \mathbf{F}^i(\mathbf{G}^i(U, V)) \quad , \quad (4.4)$$

die Umparametrisierung $(U, V) \rightarrow (\frac{U}{a}, V)$ liefert für die Blending-Streifen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{k,j}(U, V) &= H^\downarrow\left(\frac{U}{a}, V\right) \cdot \mathbf{F}^k(\mathbf{G}^{k,\downarrow}\left(\frac{U}{a}, V\right)) + H^\uparrow\left(\frac{U}{a}, V\right) \cdot \mathbf{F}^j(\mathbf{G}^{j,\uparrow}\left(\frac{U}{a}, V\right)) \quad , \\ j &= 1, \dots, N \quad , \quad k = (j \bmod N) + 1 \quad . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Es werden nun die Übergänge an den Übergangslinien $\mathcal{E}^{k,j}$ betrachtet (Abbildung 4.11). Im Folgenden bezeichnet $\mathbf{e}_{\parallel}^{k,j}$ den bezüglich des N -Ecks im Uhrzeigersinn orientierten Einheitsvektor parallel zur Übergangslinie $\mathcal{E}^{k,j}$ und $\mathbf{e}_{\perp}^{k,j}$ den in das Zentrum des N -Ecks zeigenden Einheitsvektor senkrecht zur Übergangslinie $\mathcal{E}^{k,j}$. Zwischen den Richtungsableitungen und den U -Ableitungen und V -Ableitungen der Blending-Streifen gilt der einfache Zusammenhang

$$\frac{\partial^\alpha}{(\partial \mathbf{e}_{\perp}^{k,j})^\alpha} \frac{\partial^\beta}{(\partial \mathbf{e}_{\parallel}^{k,j})^\beta} \mathcal{F}^{k,j}(U, V) = \frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} \mathcal{F}^{k,j}(U, V) \quad .$$

Ableiten von (4.4) und (4.5), Gleichsetzen an den Übergangslinien $\mathcal{E}^{k,j}$ und anschließender Koeffizientenvergleich liefert eine Reihe von Bedingungen für eine C^2 -stetige Verbindung. Für die Blending-Funktionen muss

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{(\partial \mathbf{e}_{\perp}^{k,j})^\alpha} \frac{\partial^\beta}{(\partial \mathbf{e}_{\parallel}^{k,j})^\beta} H^{N,i}(\mathcal{E}^{k,j}) &= \\ &= \delta_{i,k} \cdot \frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} H^\downarrow(1, V) \frac{1}{a^\alpha} + \delta_{i,j} \cdot \frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} H^\uparrow(1, V) \frac{1}{a^\alpha} \quad , \quad \alpha = 0, \dots, 2 \quad , \\ \beta &= 0, \dots, 2 - \alpha \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad , \quad k = (j \bmod N) + 1 \end{aligned}$$

gelten. Diese Bedingungen lassen sich zu

$$(H16) \quad H^{N,i}(\mathcal{E}^{k,j}) = \delta_{i,k} \cdot H^\downarrow(1, V) + \delta_{i,j} \cdot H^\uparrow(1, V)$$

$$(H17) \quad H_{\mathbf{e}_{\perp}^{k,j}}^{N,i}(\mathcal{E}^{k,j}) = 0$$

$$(H18) \quad H_{\mathbf{e}_{\perp}^{k,j} \mathbf{e}_{\perp}^{k,j}}^{N,i}(\mathcal{E}^{k,j}) = 0 \quad ,$$

$$i = 1, \dots, N \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad , \quad k = (j \bmod N) + 1$$

vereinfachen. Die Forderungen an die Parametertransformationen lauten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha}{(\partial \mathbf{e}_\perp^{k,j})^\alpha} \frac{\partial^\beta}{(\partial \mathbf{e}_\parallel^{k,j})^\beta} \mathbf{G}^i(\mathcal{E}^{k,j}) &= \\
&= \delta_{i,k} \cdot \frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} \mathbf{G}^{i,\downarrow}(1, V) \frac{1}{a^\alpha} + \delta_{i,j} \cdot \frac{\partial^\alpha}{\partial U^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial V^\beta} \mathbf{G}^{i,\uparrow}(1, V) \frac{1}{a^\alpha} \quad , \quad \alpha = 0, \dots, 2 \quad , \\
\beta &= 0, \dots, 2 - \alpha \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad , \quad k = (j \bmod N) + 1 \quad , \quad i = j, k \quad .
\end{aligned}$$

Diese können zu

$$(G5) \quad \mathbf{G}^i(\mathcal{E}^{k,j}) = \delta_{i,k} \cdot \mathbf{G}^{i,\downarrow}(1, V) + \delta_{i,j} \cdot \mathbf{G}^{i,\uparrow}(1, V)$$

$$(G6) \quad \mathbf{G}_{\mathbf{e}_\perp^{k,j}}^i(\mathcal{E}^{k,j}) = \delta_{i,k} \cdot \mathbf{G}_U^{i,\downarrow}(1, V) \frac{1}{a} + \delta_{i,j} \cdot \mathbf{G}_U^{i,\uparrow}(1, V) \frac{1}{a}$$

$$(G7) \quad \mathbf{G}_{\mathbf{e}_\perp^{k,j} \mathbf{e}_\perp^{k,j}}^i(\mathcal{E}^{k,j}) = \delta_{i,k} \cdot \mathbf{G}_{UU}^{i,\downarrow}(1, V) \frac{1}{a^2} + \delta_{i,j} \cdot \mathbf{G}_{UU}^{i,\uparrow}(1, V) \frac{1}{a^2}$$

$$(G8) \quad \mathbf{G}_{\mathbf{e}_\perp^{k,j} \mathbf{e}_\parallel^{k,j}}^i(\mathcal{E}^{k,j}) = \delta_{i,k} \cdot \mathbf{G}_{UV}^{i,\downarrow}(1, V) \frac{1}{a} + \delta_{i,j} \cdot \mathbf{G}_{UV}^{i,\uparrow}(1, V) \frac{1}{a} \quad ,$$

$$j = 1, \dots, N \quad , \quad k = (j \bmod N) + 1 \quad , \quad i = j, k$$

vereinfacht werden.

4.2.3 Punkte an denen drei oder mehr Teilflächen zusammenstoßen

Die letzten noch zu betrachtenden Punkte der Gesamtfläche sind die Punkte, an denen drei oder mehr Teilflächen zusammenstoßen. Die Verwendung ähnlicher Karten wie im letzten Unterabschnitt liefert C^2 -stetige Parameterdarstellungen, die jedoch keine neuen Bedingungen für die Blending-Funktionen oder Parametertransformationen liefern.

4.3 Konstruktion der Blending-Funktionen

In diesem Abschnitt geht es darum, die Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow der Blending-Streifen und die Blending-Funktionen $H^{N,i}$, $N \geq 3$, $i = 1, \dots, N$, der N -flächigen Blends zu konstruieren. Dabei sind die im letzten Kapitel aufgestellten Bedingungen (H1) bis (H18) für eine C^2 -stetige Gesamtfläche zu beachten.

4.3.1 Konstruktion der Blending-Funktionen der Blending-Streifen

Neben den für eine C^2 -stetige Gesamtfläche notwendigen Bedingungen (H1) bis (H15) gibt es weitere Eigenschaften, die sinnvolle Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow aufweisen sollten.

Partition der 1: Bilden die Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow keine Partition der 1, würde die affine Invarianz des Verfahrens verloren gehen. Das würde zum Beispiel bedeuten, dass zwei identische Dreiecksnetze, von denen eines verschoben oder gedreht wurde, zwei verschieden geformte, approximierende Gesamtflächen erhalten würden. Es muss also

$$(H19) \quad H^\downarrow(U, V) + H^\uparrow(U, V) = 1$$

gelten.

Spiegelsymmetrie in V-Richtung: Will man keine der beiden zu überblendenden B-Spline-Flächen bevorzugen, müssen die beiden Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow jeweils durch Spiegelung an der Achse $(U, \frac{1}{2})$, $U \in [0, 1]$, ineinander überführbar sein. Es muss also

$$(H20) \quad H^\downarrow(U, V) = H^\uparrow(U, 1 - V)$$

gelten.

Translationssymmetrie in U-Richtung: Die Profilkurven $\mathcal{F}(U = \text{konstant}, V)$ eines Blending-Streifens sollen nur von den beiden zu überblendenden B-Spline-Flächen und den entsprechenden Parametertransformationen abhängig sein, nicht jedoch von den Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow . Das bedeutet, die Blending-Funktionen müssen unabhängig von U sein. Es muss also

$$(H21) \quad H^\downarrow(U, V) = H^\downarrow(U = \text{konstant}, V)$$

$$(H22) \quad H^\uparrow(U, V) = H^\uparrow(U = \text{konstant}, V)$$

gelten.

Damit als Gesamtfläche eine stückweise Polynomfläche erzeugt wird, müssen die Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow ebenfalls Polynome sein. Aufgrund der leichten geometrischen Interpretierbarkeit der Kontrollpunkte werden H^\downarrow und H^\uparrow in *Bezier*-Form angesetzt. Da die Funktionen unabhängig von U sind (Bedingungen (H21) und (H22)) können an Stelle von TP-*Bezier*-Flächen einfache *Bezier*-Kurven verwendet werden. Der Ansatz für H^\downarrow lautet

$$H^\downarrow(U, V) = \sum_{i=0}^n B_i^n(V) h_i^\downarrow .$$

Aus den Bedingungen (H1) bis (H6) folgt

$$\begin{aligned} h_0^\downarrow &= h_1^\downarrow = h_2^\downarrow = 1 \\ h_{n-2}^\downarrow &= h_{n-1}^\downarrow = h_n^\downarrow = 0 . \end{aligned}$$

Im Vorgriff auf die Konstruktion der Blending-Funktionen für N -flächige Blends wird $n = 7$ gesetzt. Bei kleinerem Grad n lassen sich keine geeigneten Blending-Funktionen $H^{N,i}$ finden (Unterabschnitt 4.3.2). Die beiden noch nicht festgelegten Kontrollpunkte h_3^\downarrow und h_4^\downarrow werden ebenfalls von den Blending-Funktionen für N -flächige Blends bestimmt. Es muss

$$\begin{aligned} h_3^\downarrow &= 1 \\ h_4^\downarrow &= 0 \end{aligned}$$

gelten (Unterabschnitt 4.3.2). Aufgrund der geforderten Partition der 1 (Bedingung (H19)) folgt für H^\uparrow

$$H^\uparrow(U, V) = \sum_{i=0}^n B_i^n(V) h_i^\uparrow , \quad h_i^\uparrow = 1 - h_i^\downarrow .$$

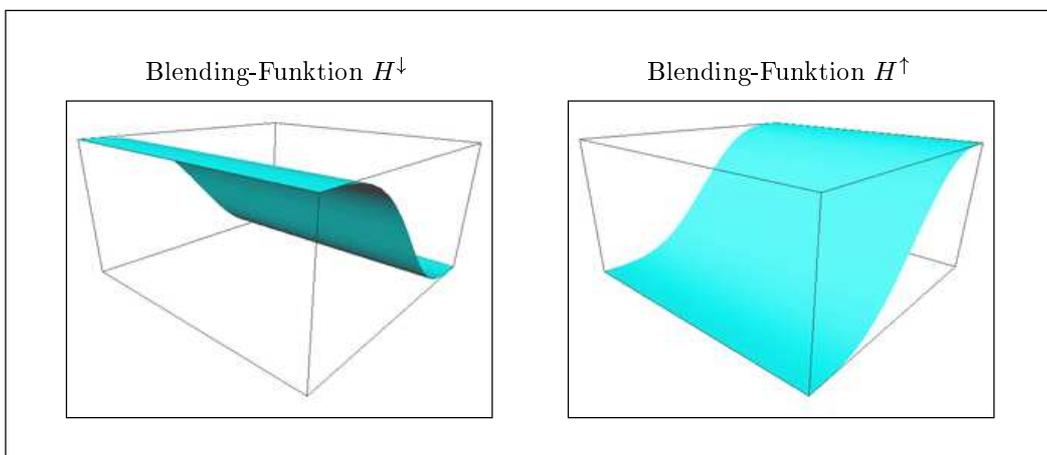


Abbildung 4.12: Die Blending-Funktionen der Blending-Streifen

Einerseits sind keine weiteren Freiheitsgrade mehr vorhanden, andererseits lässt sich leicht überprüfen, dass die aufgestellten Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow alle geforderten Eigenschaften (H1) bis (H15) und (H19) bis (H22) aufweisen. Die Blending-Funktionen für Blending-Streifen wurden damit erfolgreich bestimmt. Sie sind in Abbildung 4.12 zu sehen.

4.3.2 Konstruktion der Blending-Funktionen der N -flächigen Blends

Will man als Gesamtfläche eine stückweise Polynomfläche erhalten, müssen die Blending-Funktionen der N -flächigen Blends ebenfalls als Polynome angesetzt werden. *Bezier*-Dreiecke sind für die folgende Konstruktion die am besten zu handhabende Darstellung von Polynomflächen. Die Blending-Funktionen $H^{N,i}$ eines N -flächigen Blends, deren Parametergebiet die Form eines regulären N -Ecks besitzt, werden daher aus N *Bezier*-Dreiecken zusammengesetzt. Abbildung 4.13 zeigt die Aufteilung der Parametergebiete auf die einzelnen *Bezier*-Dreiecke für die Funktionen $H^{3,1}$, $H^{4,1}$, $H^{5,1}$ und $H^{6,1}$. Die Aufteilungen für $N \geq 7$ werden nach demselben Schema vorgenommen.

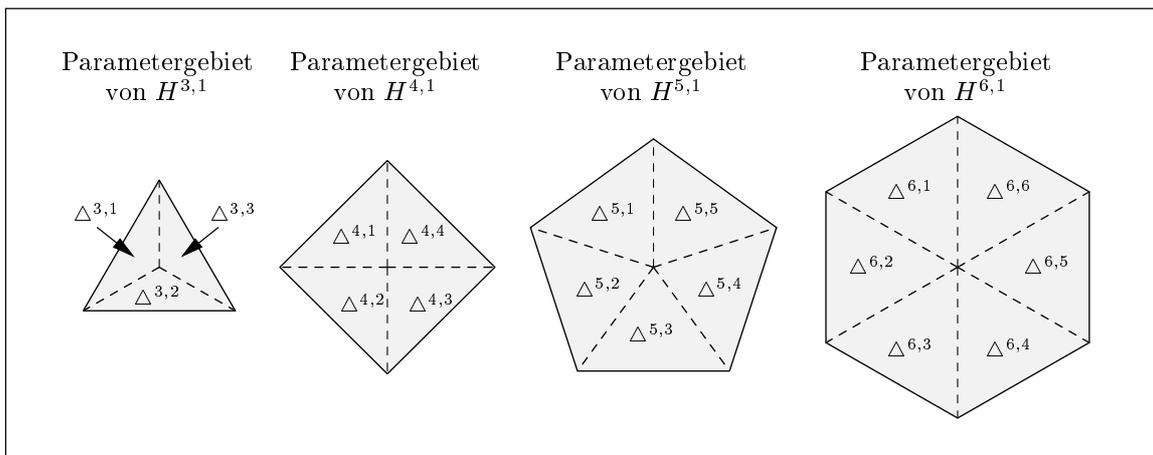


Abbildung 4.13: Aufteilung der Parametergebiete der $H^{N,i}$ auf die *Bezier*-Dreiecke

Eine Forderung an die Blending-Funktionen $H^{N,i}$, die deren folgende Konstruktion sehr vereinfacht, ist die Existenz einer N -zähligen Symmetrieachse durch das Zentrum des Parametergebiets (die Begründung dieser Forderung wird weiter unten in diesem Unterabschnitt geliefert). Das bedeutet, die Blending-Funktionen $H^{N,i}$, $i = 2, \dots, N$, können durch Rotation der Blending-Funktion $H^{N,1}$ um den Winkel $\frac{2\pi}{N}$ um das Zentrum des Parametergebiets entgegen dem Uhrzeigersinn erzeugt werden. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich daher ausschließlich auf die Konstruktion von $H^{N,1}$, da durch diese Funktion automatisch alle Blending-Funktionen $H^{N,i}$ festgelegt sind.

Die N *Bezier*-Dreiecke $\Delta^{N,\alpha}$, aus denen sich die Funktion $H^{N,1}$ zusammensetzt, haben die Form

$$\Delta^{N,\alpha}(U, V) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(U, V) h_{i,j,k}^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Die Anordnung der Kontrollpunkte $h_{i,j,k}^\alpha$ kann Abbildung 4.14 entnommen werden.

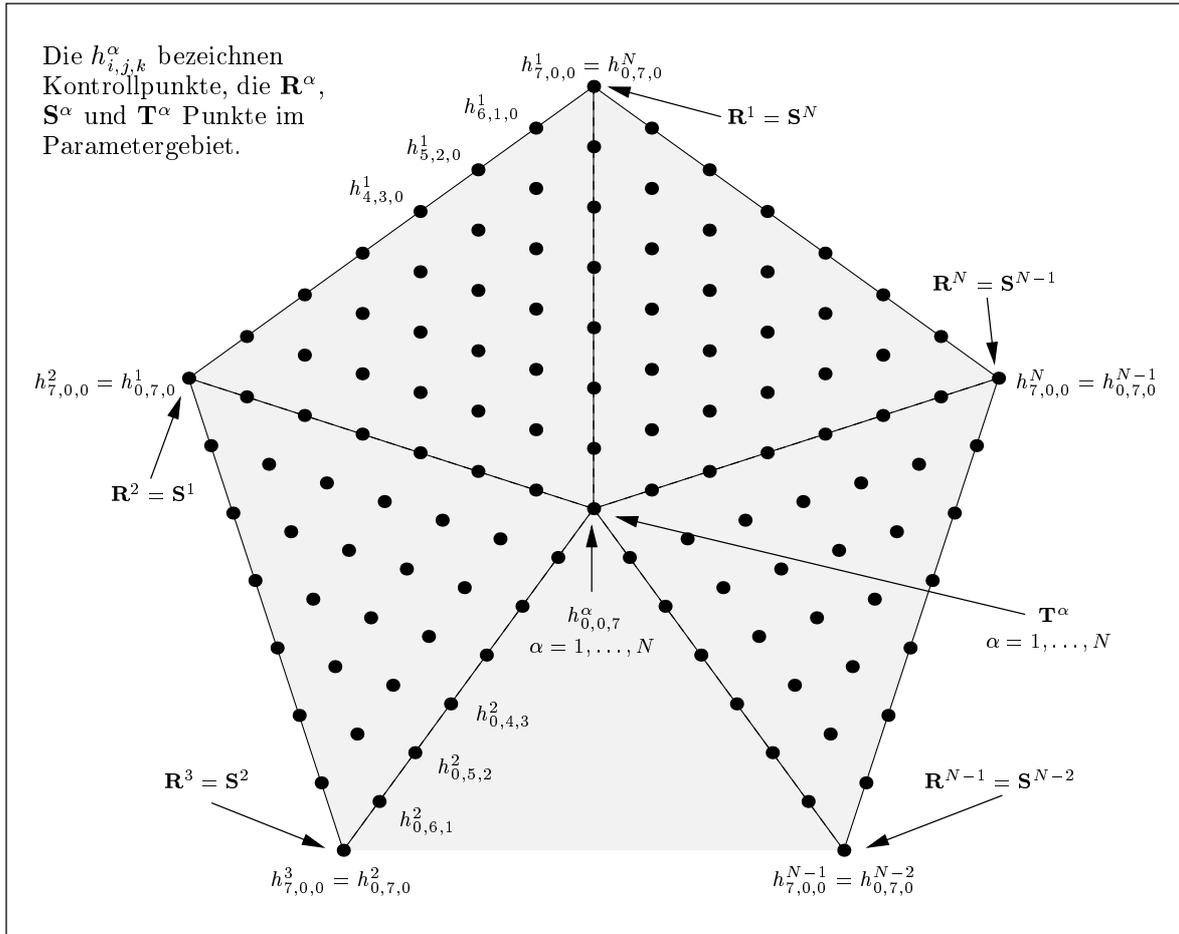


Abbildung 4.14: Die Anordnung der Kontrollpunkte der *Bezier*-Dreiecke $\Delta^{N,\alpha}$

Da die Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow mittlerweile bekannt sind, können die Bedingungen (H16) bis (H18) für C^2 -stetige Anschlüsse der Blending-Streifen nun vollständig durch die Kontrollpunkte $h_{i,j,k}^\alpha$ ausgedrückt werden. Bedingung (H16) lautet

$$h_{i,n-i,0}^1 = \begin{cases} 0 & , \quad i = 0, \dots, 2 \\ 1 & , \quad i = n - 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.6)$$

$$h_{i,n-i,0}^\alpha = 0, \quad \alpha = 2, \dots, N - 1, \quad i = 0, \dots, n \quad (4.7)$$

$$h_{i,n-i,0}^N = \begin{cases} 1 & , \quad i = 0, \dots, 2 \\ 0 & , \quad i = n-2, \dots, n \quad , \end{cases} \quad (4.8)$$

Bedingung (H17)

$$\begin{aligned} 2h_{i,n-i-1,1}^\alpha - h_{i,n-i,0}^\alpha - h_{i+1,n-i-1,0}^\alpha &= 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N \quad , \\ i &= 0, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

und Bedingung (H18)

$$\begin{aligned} 4h_{i,n-i-2,2}^\alpha - 4h_{i,n-i-1,1}^\alpha - 4h_{i+1,n-i-2,1}^\alpha + h_{i,n-i,0}^\alpha + 2h_{i+1,n-i-1,0}^\alpha + \\ h_{i+2,n-i-2,0}^\alpha &= 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N \quad , \quad i = 0, \dots, n-2 \quad . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Um eine C^2 -stetige Gesamtfläche zu erhalten, müssen die Übergänge zwischen den *Bezier*-Dreiecken $\Delta^{N,\alpha}$ ebenfalls C^2 -stetig sein (Unterabschnitt 4.2.1). Das führt auf die C^0 -Bedingungen

$$h_{i,0,n-i}^{(\alpha \bmod N)+1} = h_{0,i,n-i}^\alpha \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N \quad , \quad i = 0, \dots, n \quad , \quad (4.11)$$

die C^1 -Bedingungen

$$\begin{aligned} h_{i,1,n-i-1}^{(\alpha \bmod N)+1} &= \rho_\alpha h_{1,i,n-i-1}^\alpha + \sigma_\alpha h_{0,i+1,n-i-1}^\alpha + \tau_\alpha h_{0,i,n-i}^\alpha \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N \quad , \\ i &= 0, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

und die C^2 -Bedingungen

$$\begin{aligned} h_{i,2,n-i-2}^{(\alpha \bmod N)+1} &= (\rho_\alpha)^2 h_{2,i,n-i-2}^\alpha + (\sigma_\alpha)^2 h_{0,i+2,n-i-2}^\alpha + (\tau_\alpha)^2 h_{0,i,n-i}^\alpha + \\ &2\rho_\alpha \sigma_\alpha h_{1,i+1,n-i-2}^\alpha + 2\rho_\alpha \tau_\alpha h_{1,i,n-i-1}^\alpha + 2\sigma_\alpha \tau_\alpha h_{0,i+1,n-i-1}^\alpha \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N \quad , \\ i &= 0, \dots, n-2 \quad , \end{aligned} \quad (4.13)$$

wobei ρ_α , σ_α und τ_α die baryzentrischen Koordinaten des Punktes $\mathbf{S}^{(\alpha \bmod N)+1}$ bezüglich \mathbf{R}^α , \mathbf{S}^α und \mathbf{T}^α sind (Abbildung 4.14).

Neben diesen für eine C^2 -stetige Gesamtfläche notwendigen Bedingungen gibt es weitere Ei-

genschaften, die sinnvolle Blending-Funktionen $H^{N,i}$ aufweisen müssen.

Existenz einer N -zähligen Symmetrieachse durch den Koordinatenursprung:

Soll keine der N zu überblendenden B-Spline-Flächen bevorzugt werden, müssen die Blending-Funktionen durch Rotation um den Ursprung ineinander überführbar sein. Wie bereits zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt, werden die Blending-Funktionen $H^{N,i}$, $i = 2, \dots, N$, durch Rotation der Blending Funktion $H^{N,1}$ um den Winkel $\frac{2\pi}{N}$ um das Zentrum des Parametergebiets entgegen dem Uhrzeigersinn erzeugt. Die Kontrollpunkte $h_{i,j,k}^\alpha$ legen also alle N Blending-Funktionen eindeutig fest.

Partition der 1: Wie bereits in Unterabschnitt 4.3.1 erwähnt, ist dies eine notwendige Eigenschaft um die affine Invarianz des Verfahrens zu gewährleisten. Es muss also

$$\sum_{\alpha=1}^N h_{i,j,k}^\alpha = 1 \quad , \quad i + j + k = 7 \quad , \quad i, j, k \geq 0 \quad (4.14)$$

gelten.

Spiegelsymmetrie in V -Richtung: Die Form der C^2 -stetigen Gesamtfläche sollte sich nicht ändern, wenn die Parametergebiete der B-Spline-Flächen gespiegelt werden. Dies erfordert Spiegelsymmetrie jeder der Blendingfunktionen $H^{N,i}$ bezüglich der durch \mathbf{R}^i und den Ursprung verlaufenden Achse. Für die Kontrollpunkte bedeutet das

$$h_{i,j,k}^\alpha = h_{j,i,k}^{N-\alpha+1} \quad , \quad \alpha = 1, \dots, \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \quad , \quad i + j + k = 7 \quad ,$$

$$i, j, k \geq 0 \quad . \quad (4.15)$$

Die Gleichungen (4.6) bis (4.15) bilden ein lineares Gleichungssystem, das eine ganze Reihe linear abhängiger Gleichungen beinhaltet. Mit Hilfe des *Gauß*-Algorithmus wurde ermittelt, für welche Wahl von n dieses System lösbar ist, und wieviele Freiheitsgrade diese Lösung besitzt (Tabelle 4.1).

	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$
$n = 6$	Unlösbar	2	Unlösbar	Unlösbar	Unlösbar	Unlösbar	Unlösbar
$n = 7$	3	6(5)	4	5	5	6	6
$n = 8$	6	11	10	13	14	17	18

Tabelle 4.1: Anzahl der Freiheitsgrade in Abhängigkeit vom Grad n

Eine Besonderheit, auf die bei der Konstruktion der Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow bereits vorgegriffen wurde, sind die beiden Randkurven $H^{N,1}(\overline{R^1 S^1})$ und $H^{N,1}(\overline{R^N S^N})$, an die H^\downarrow

und H^\dagger C^2 -stetig anschließen müssen (Bedingungen (H16) bis (H18)). Bei der Wahl von $n = 7$, der nach Tabelle 4.1 niedrigste mögliche Grad, sind diese beiden Randkurven durch die Kontrollpunkte

$$h_{i,n-i,0}^1 = \begin{cases} 0 & , \quad i = 0, \dots, 3 \\ 1 & , \quad i = 4, \dots, 7 \end{cases}$$

$$h_{i,n-i,0}^N = \begin{cases} 1 & , \quad i = 0, \dots, 3 \\ 0 & , \quad i = 4, \dots, 7 \end{cases}$$

festgelegt. Die einzige Ausnahme bildet hierbei die Basisfunktion $H^{4,1}$ des 4-flächigen Blends. Dort kann einer der vier Kontrollpunkte $h_{3,4,0}^1$, $h_{4,3,0}^1$, $h_{3,4,0}^N$ und $h_{4,3,0}^N$ beliebig gewählt werden. Um für alle N -flächigen Blends dieselben Randkurven zu erhalten wird

$$h_{3,4,0}^1 = 0 \quad (4.16)$$

gesetzt, woraus $h_{4,3,0}^1 = 1$, $h_{3,4,0}^N = 1$ und $h_{4,3,0}^N = 0$ folgt. Die Anzahl der verbleibenden Freiheitsgrade reduziert sich dadurch von 6 auf 5 (Tabelle 4.1).

Die verbleibenden Freiheitsgrade werden so gewählt, dass das Glattheitsfunktional

$$\mathcal{J}(H^{N,1}) = \int_{D(H^{N,1})} dU dV \left(\left(H_{UU}^{N,1} \right)^2 + 2 \left(H_{UV}^{N,1} \right)^2 + \left(H_{VV}^{N,1} \right)^2 \right) ,$$

die vereinfachte *Thin-Plate-Energy*, minimiert wird. $D(H^{N,1})$ bezeichnet dabei das N -eckige Parametergebiet von $H^{N,1}$. $\mathcal{J}(H^{N,1})$ kann in eine Summe über alle *Bezier*-Dreiecke zerlegt werden, nämlich

$$\mathcal{J}(H^{N,1}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{J}(\Delta^{N,\alpha}) .$$

Für die Glieder dieser Summe gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\Delta^{N,\alpha}) &= \int_{D(\Delta^{N,\alpha})} dU dV \left(\left(\Delta_{UU}^{N,\alpha} \right)^2 + 2 \left(\Delta_{UV}^{N,\alpha} \right)^2 + \left(\Delta_{VV}^{N,\alpha} \right)^2 \right) = \\ &= \sum_{i+j+k=7} \sum_{i'+j'+k'=7} h_{i,j,k}^\alpha h_{i',j',k'}^\alpha \\ &\quad \left\{ \int_{D(\Delta^{N,\alpha})} dU dV \left(\frac{\partial^2}{\partial U^2} B_{i,j,k}^7(U, V) \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial U^2} B_{i',j',k'}^7(U, V) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{D(\Delta^{N,\alpha})} dU dV \left(\frac{\partial^2}{\partial U \partial V} B_{i,j,k}^7(U, V) \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial U \partial V} B_{i',j',k'}^7(U, V) \right) + \\
& \int_{D(\Delta^{N,\alpha})} dU dV \left(\frac{\partial^2}{\partial V^2} B_{i,j,k}^7(U, V) \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial V^2} B_{i',j',k'}^7(U, V) \right) \Big\} = \\
& = \sum_{i+j+k=7} \sum_{i'+j'+k'=7} h_{i,j,k}^\alpha h_{i',j',k'}^\alpha A_{i,j,k;i',j',k'} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $D(\Delta^{N,\alpha})$ das dreieckige Parametergebiet von $\Delta^{N,\alpha}$ bezeichnet. Die zu $A_{i,j,k;i',j',k'}$ zusammengefassten zweidimensionalen Integrale über bivariate Polynome können problemlos analytisch berechnet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde hierfür ein *Maple*-Programm geschrieben.

Sei

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i+j+k=7} B_{\beta;i,j,k}^\alpha h_{i,j,k}^\alpha - c_\beta = 0 \quad , \quad \beta = 1, \dots, M \quad (4.17)$$

das von den Gleichungen (4.6) bis (4.16) gebildete lineare Gleichungssystem, wobei linear abhängige Gleichungen bereits eliminiert wurden. Dieses stellt die Nebenbedingung für das zu minimierende Funktional

$$\mathcal{J}(H^{N,1}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{J}(\Delta^{N,\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i+j+k=7} \sum_{i'+j'+k'=7} h_{i,j,k}^\alpha h_{i',j',k'}^\alpha A_{i,j,k;i',j',k'}$$

dar. Dieses Problem kann mit Hilfe von *Lagrangeschen* Multiplikatoren gelöst werden. Für die Ableitungen der linken Seiten von (4.17) gilt

$$\frac{\partial}{\partial h_{i,\tilde{j},\tilde{k}}^\alpha} \left(\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i+j+k=7} B_{\beta;i,j,k}^\alpha h_{i,j,k}^\alpha - c_\beta \right) = B_{\beta;\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}}^\alpha \quad , \quad \beta = 1, \dots, M \quad ,$$

für die Ableitungen von $\mathcal{J}(H^{N,1})$

$$\frac{\partial}{\partial h_{i,\tilde{j},\tilde{k}}^\alpha} \mathcal{J}(H^{N,1}) = 2 \sum_{i+j+k=7} h_{i,j,k}^\alpha A_{i,j,k;\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}} \quad .$$

Insgesamt erhält man das eindeutig lösbare lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i+j+k=7} B_{\beta;i,j,k}^{\alpha} h_{i,j,k}^{\alpha} - c_{\beta} = 0 \quad , \quad \beta = 1, \dots, M$$

$$\sum_{i+j+k=7} h_{i,j,k}^{\tilde{\alpha}} A_{i,j,k;\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}} = \sum_{\beta=1}^M \lambda_{\beta} B_{\beta;\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}}^{\tilde{\alpha}} \quad , \quad \tilde{\alpha} = 1, \dots, N \quad , \quad \tilde{i} + \tilde{j} + \tilde{k} = 7 \quad ,$$

dessen Lösung die gesuchten Kontrollpunkte $h_{i,j,k}^{\alpha}$ der Blending-Funktion $H^{N,1}$ enthält. Als Lösungsverfahren wurde der *Gauß*-Algorithmus mit relativer Spaltenmaximum-Strategie verwendet (siehe [Grab00]). Die Blending-Funktionen für $N = 3, \dots, 6$ sind in Abbildung 4.15 zu sehen.

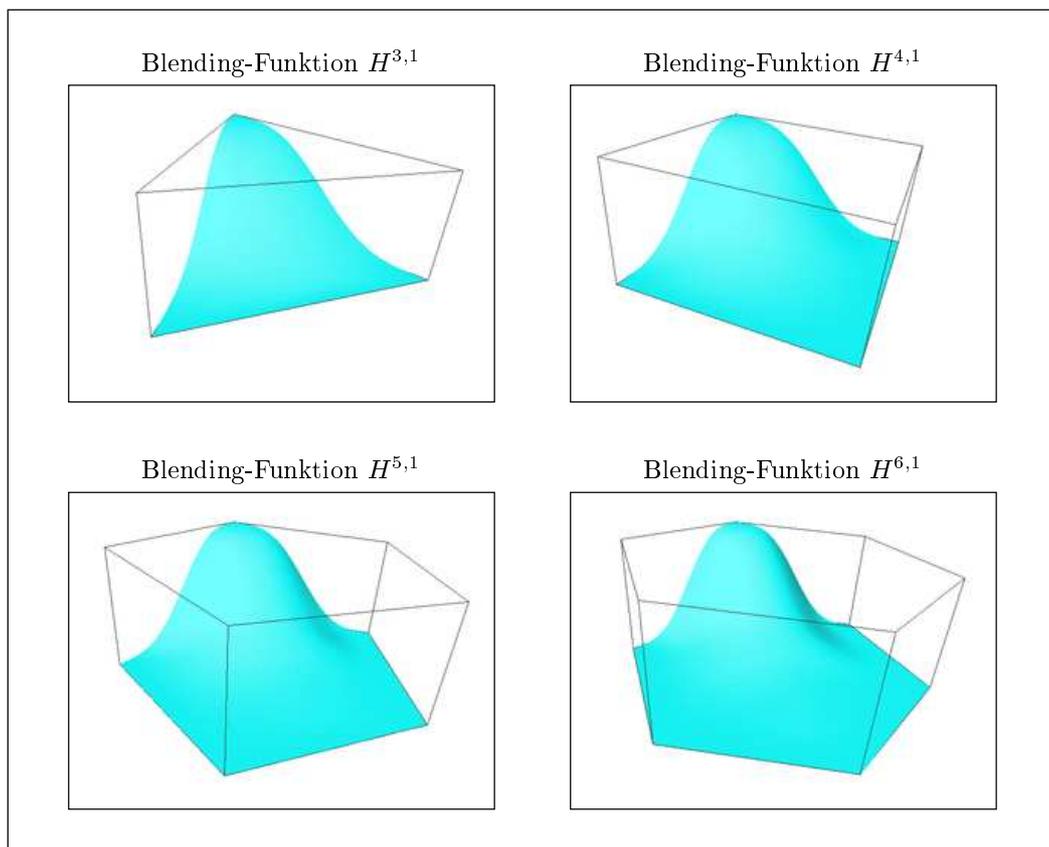


Abbildung 4.15: Die Blending-Funktionen der 3-, 4-, 5- und 6-flächigen Blends

4.4 Konstruktion der Parametertransformationen

In diesem Abschnitt geht es darum, die Blending-Bereiche in den Parametergebieten der B-Spline-Flächen festzulegen und geeignete Parametertransformationen zu konstruieren, die die Parametergebiete der Blending-Flächen in diese Blending-Bereiche abbilden.

Den besten Anhaltspunkt zur Lage der Blending-Bereiche in den Parametergebieten der B-Spline-Flächen bieten die Parameterwerte der Randpunkte der Segmente. Ausgehend davon wird versucht, Blending-Bereiche zu finden, die im \mathbb{R}^3 etwa die Breite $d_{\text{innen}} + d_{\text{außen}}$ aufweisen. Diese Blending-Bereiche sollen sich von den Randpunkten der Segmente, etwa um d_{innen} nach innen und um $d_{\text{außen}}$ nach außen erstrecken. d_{innen} und $d_{\text{außen}}$ sind vom Benutzer vorgegebene Parameter, durch die die Breite der Blending-Flächen und deren Form beeinflusst werden kann. Als grobe Richtlinie für das Verhältnis der beiden Parameter kann die Beziehung $d_{\text{innen}} \approx 2 d_{\text{außen}}$ angesehen werden. Weitere Hinweise zur Wahl von d_{innen} und $d_{\text{außen}}$ sind in Unterabschnitt 4.6.2 zu finden.

4.4.1 Die Hilfsttransformation \mathbf{T}

Um keine lästigen Umrechnungen von Abständen und Winkeln zwischen den Parametergebieten der B-Spline-Flächen und dem \mathbb{R}^3 durchführen zu müssen, werden diese Parametergebiete im weiteren Verlauf dieses Abschnitts fast immer mit der im Folgenden konstruierten Abbildung \mathbf{T} transformiert. Um Missverständnissen vorzubeugen sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich bei \mathbf{T} um eine reine Hilfsttransformation handelt, die in keiner Weise in die gesuchten Parametertransformationen eingeht.

Sei $D^{(u,v)}$ das Parametergebiet einer B-Spline-Fläche \mathbf{F} . Für infinitesimale Abstände (du, dv) von einem Parameterpunkt $(u_0, v_0) \in D^{(u,v)}$ gilt

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \mathbf{F}(u_0 + du, v_0 + dv) - \mathbf{F}(u_0, v_0) = \mathbf{F}_{u,0} du + \mathbf{F}_{v,0} dv \\ d\mathbf{F}^2 &= (du \ dv) \underbrace{\begin{pmatrix} (\mathbf{F}_{u,0})^2 & \mathbf{F}_{u,0} \mathbf{F}_{v,0} \\ \mathbf{F}_{u,0} \mathbf{F}_{v,0} & (\mathbf{F}_{v,0})^2 \end{pmatrix}}_{=g(u_0, v_0) \quad (\text{metrischer Tensor})} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen können in der Umgebung des Parameterpunktes (u_0, v_0) die Näherungen

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{F} &= \mathbf{F}(u_1, v_1) - \mathbf{F}(u_2, v_2) \approx \mathbf{F}_{u,0} (u_1 - u_2) + \mathbf{F}_{v,0} (v_1 - v_2) = \\ &= \mathbf{F}_{u,0} \Delta u + \mathbf{F}_{v,0} \Delta v \end{aligned}$$

$$\Delta \mathbf{F}^2 \approx (\Delta u \ \Delta v) \mathbf{g}(u_0, v_0) \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

für endliche Abstände $(\Delta u, \Delta v)$ abgeleitet werden. Um lästige Umrechnungen von Entfernungen und Winkeln zwischen dem Parametergebiet $D^{(u,v)}$ und dem \mathbb{R}^3 vermeiden zu können, wird eine Parametertransformation $\mathbf{T}(u_0, v_0) : D^{(\tilde{u}, \tilde{v})} \rightarrow D^{(u,v)}$ gesucht, für die

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \mathbf{F}(\mathbf{T}(u_0, v_0)(\tilde{u}, \tilde{v})) = \mathbf{F}(u, v) \\ \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) &= \begin{pmatrix} (\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},0})^2 & \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},0} \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},0} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},0} \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},0} & (\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},0})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Id} \end{aligned}$$

gilt. Der metrische Tensor $\tilde{\mathbf{g}}$ soll also am Punkt $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = (\mathbf{T}(u_0, v_0))^{-1}(u_0, v_0)$ gleich der Identität sein. Das bedeutet, das neue Parametergebiet $D^{(\tilde{u}, \tilde{v})}$ stellt lokal, das heißt in der Umgebung von $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$, eine Approximation der B-Spline-Fläche in Form des zweidimensionalen *Euklidischen* Raums dar. In einfachen Worten ausgedrückt gelten näherungsweise die folgenden beiden Aussagen:

- Abstände im Parametergebiet $D^{(\tilde{u}, \tilde{v})}$ entsprechen Abständen im \mathbb{R}^3 .
- Winkel im Parametergebiet $D^{(\tilde{u}, \tilde{v})}$ entsprechen Winkeln im \mathbb{R}^3 .

Da die gesuchte Transformation \mathbf{T} eine Skalierung und Scherung des Parametergebietes $D^{(u,v)}$ bewirkt, bietet sich als Ansatz eine lineare Abbildung an. Da die von \mathbf{T} geforderten Eigenschaften

$$(\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},0})^2 = 1 \quad (\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},0})^2 = 1 \quad \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u},0} \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v},0} = 0 \quad (4.18)$$

invariant unter Drehung und Spiegelung des Parametergebietes $D^{(\tilde{u}, \tilde{v})}$ sind, ist ein kontinuierlicher und einen diskreter Freiheitsgrad zu erwarten. Aus dem Ansatz

$$\mathbf{T}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{pmatrix}$$

folgt

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{T}(u_0, v_0)(\tilde{u}, \tilde{v})) = \mathbf{F}(T_{1,1} \tilde{u} + T_{1,2} \tilde{v}, T_{2,1} \tilde{u} + T_{2,2} \tilde{v}) \quad (4.19)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{u}} = \mathbf{F}_u T_{1,1} + \mathbf{F}_v T_{2,1} \quad (4.20)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{v}} = \mathbf{F}_u T_{1,2} + \mathbf{F}_v T_{2,2} \quad (4.21)$$

Der kontinuierliche Freiheitsgrad wird durch die folgende Rechnung vereinfachende Wahl $T_{2,1} = 0$ verbraucht (das bedeutet, die u -Richtung ist parallel zur \tilde{u} -Richtung). Einsetzen der Gleichungen (4.20) und (4.21) in die Forderungen (4.18) liefert die Matrixelemente

$$\begin{aligned} T_{1,1} &= \pm \frac{1}{\|\mathbf{F}_{u,0}\|} \\ T_{1,2} &= T_{2,2} \underbrace{\frac{-\mathbf{F}_{u,0} \mathbf{F}_{v,0}}{(\mathbf{F}_{u,0})^2}}_{=C} \\ T_{2,2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{C^2 (\mathbf{F}_{u,0})^2 + 2C \mathbf{F}_{u,0} \mathbf{F}_{v,0} + (\mathbf{F}_{v,0})^2}}}. \end{aligned}$$

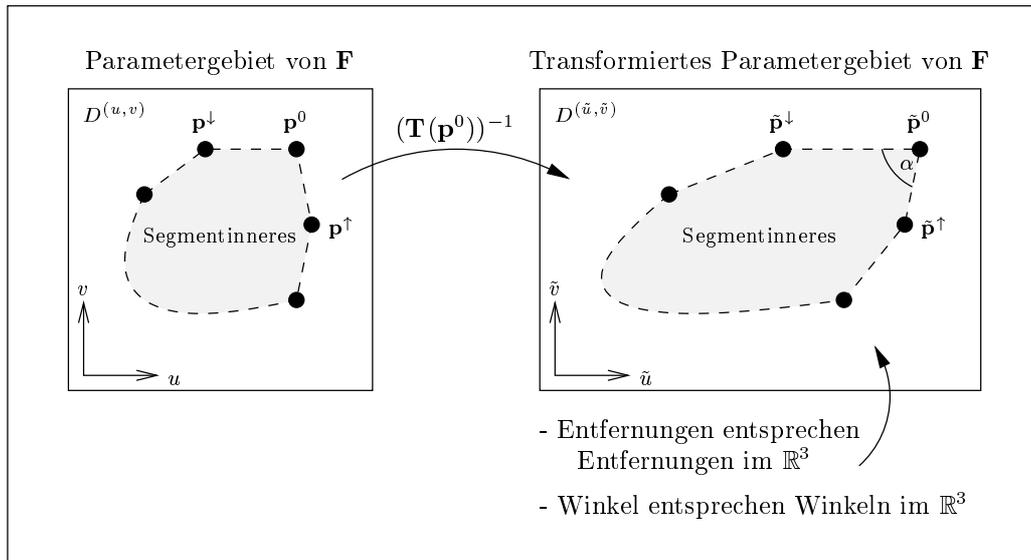
Der diskrete Freiheitsgrad tritt in Form der Vorzeichen von $T_{1,1}$ und $T_{2,2}$ auf und wird durch Wahl von jeweils $+$ verbraucht (das bedeutet, die Transformation \mathbf{T} bewirkt keine Spiegelung des Parametergebiets).

4.4.2 Abbilden der Parametergebiete der N -flächigen Blends in die Parametergebiete der B-Spline-Flächen

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die in diesem Abschnitt präsentierte Konstruktion einer Parametertransformation zwischen den Parametergebieten der Blending-Flächen und der B-Spline-Flächen nur eine von vielen möglichen darstellt. Jede Transformation, die die in Abschnitt 4.3 aufgestellten Bedingungen (G1) bis (G8) erfüllt, führt zu einer C^2 -stetigen Gesamtfläche. Die zu konstruierende Transformation beeinflusst jedoch massiv die Form der resultierenden Gesamtfläche. Da die Eigenschaften einer vom menschlichen Standpunkt aus wohlgeformten Fläche mathematisch kaum auszudrücken sind, ist das Finden einer geeigneten Transformation sicher der schwierigste Teil des in diesem Kapitel präsentierten Verfahrens. Im Folgenden wird eine einfache aber in den meisten Fällen gute Ergebnisse erzielende Transformation vorgestellt.

Begonnen wird mit der Abbildung der Parametergebiete der N -flächigen Blends in die Parametergebiete der B-Spline-Flächen. Sei $D^{(U,V)}$ das Parametergebiet eines N -flächigen Blends (reguläres N -Eck mit Seitenlänge 1) und $D^{(u,v)}$ das Parametergebiet einer der N B-Spline-Flächen, in das $D^{(U,V)}$ abzubilden ist. Die Parameterwerte des Sternpunktes, zu dem der betrachtete N -flächige Blend gehört (dort stoßen N -Segmente zusammen), werden im Folgenden mit \mathbf{p}_0 , die Parameterwerte der beiden benachbarten Segment-Randpunkte mit \mathbf{p}^\downarrow und \mathbf{p}^\uparrow bezeichnet.

Um Entfernungen und Winkel problemlos zwischen dem Parametergebiet der B-Spline-Fläche und dem \mathbb{R}^3 umrechnen zu können, wird $D^{(u,v)}$ zuerst mit der linearen Abbildung $(\mathbf{T}(\mathbf{p}^0))^{-1}$ in ein neues Parametergebiet $D^{(\tilde{u},\tilde{v})}$ transformiert (Abbildung 4.16).

Abbildung 4.16: Die Transformation zwischen $D^{(u,v)}$ und $D^{(\tilde{u},\tilde{v})}$

Die Transformation \mathbf{T}^{-1} wird für den Parameterpunkt \mathbf{p}^0 bestimmt, da in dessen Nähe der Parameterbereich $D^{(U,V)}$ abgebildet wird. Die gesuchte Transformation $\mathbf{G} : D^{(U,V)} \rightarrow D^{(u,v)}$ kann gemäß $\mathbf{G} = \mathbf{T}(\mathbf{p}^0) \circ \tilde{\mathbf{G}}$ in das bereits bekannte \mathbf{T} und eine Transformation $\tilde{\mathbf{G}} : D^{(U,V)} \rightarrow D^{(\tilde{u},\tilde{v})}$ zerlegt werden.

$\tilde{\mathbf{G}}$ soll nach Möglichkeit zwei Eigenschaften erfüllen.

Eigenschaft 1: $\tilde{\mathbf{G}}$ soll eine affine Abbildung sein (affine Abbildungen sind vom mathematischen Standpunkt aus leicht zu beherrschen; darüber hinaus sind affine Abbildungen polynomielle Abbildungen; die gesuchte Parametertransformation muss zwangsläufig eine polynomielle Abbildung sein, will man eine polynomielle Gesamtfläche erhalten). Diese Forderung liegt darin begründet, dass die Parametergebiete der N -flächigen Blends, reguläre N -Ecke, nach Abbildungen wesentlich schwieriger zu handhaben sind, als die quadratischen Parametergebiete der Blending-Streifen. Diese starke Einschränkung wird später durch Transformationen mit wesentlich mehr Freiheitsgraden für die Parametergebiete der Blending-Streifen zumindest teilweise ausgeglichen.

Eigenschaft 2: Die Richtungsableitungen $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{e}_\perp^\downarrow}(\mathcal{E}^\downarrow)$ und $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{e}_\perp^\uparrow}(\mathcal{E}^\uparrow)$ senkrecht zu den Übergangslinien \mathcal{E}^\downarrow und \mathcal{E}^\uparrow an diesen Übergangslinien sollen den gleichen Winkel α bilden wie die Vektoren $\tilde{\mathbf{p}}^0 - \tilde{\mathbf{p}}^\downarrow$ und $\tilde{\mathbf{p}}^0 - \tilde{\mathbf{p}}^\uparrow$ (Abbildung 4.17). Damit wird erreicht, dass der Blending-Bereich den von den Segment-Randpunkten vorgegebenen Winkel nachbildet.

Leider ist **Eigenschaft 2** bei Verwendung einer affinen Abbildung oft nur durch erhebliche Verzerrung oder sogar Spiegelung des Parametergebietes $D^{(U,V)}$ zu erreichen (Abbildung 4.17), was wiederum äußerst unerwünschte Effekte auf die Form der Gesamtfläche

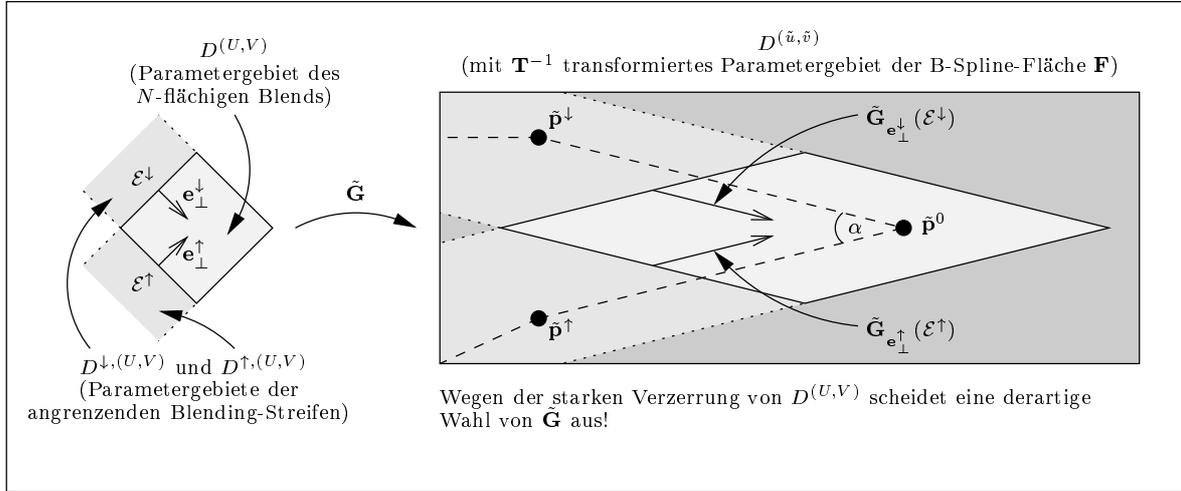


Abbildung 4.17: Starke Verzerrung des Parametergebietes $D^{(U,V)}$ unter der Abbildung $\tilde{\mathbf{G}}$

haben kann. Um beide Eigenschaften zu vereinbaren, werden im Folgenden neben der Parametertransformation $\tilde{\mathbf{G}}$ auch noch die Parametertransformationen $\tilde{\mathbf{G}}^\downarrow$ und $\tilde{\mathbf{G}}^\uparrow$ der beiden angrenzenden Blending-Streifen betrachtet.

Um $D^{(U,V)}$ bei Abbildung mit $\tilde{\mathbf{G}}$ nicht zu verzerren, wird für $\tilde{\mathbf{G}}$ der Ansatz

$$\tilde{\mathbf{G}}(U, V) = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \mathcal{R}\mathcal{S} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \mathbf{t} \quad (4.22)$$

verwendet, wobei \mathcal{R} eine Rotationsmatrix, \mathcal{S} eine einheitliche Skalierungsmatrix (also ein Skalierungsfaktor) und \mathbf{t} ein Translationsvektor ist.

$\tilde{\mathbf{G}}^\downarrow$ und $\tilde{\mathbf{G}}^\uparrow$ sollen polynomielle Abbildungen vom Grad 5 in U -Richtung und vom Grad 1 in V -Richtung sein (alle Parametertransformationen für Blending-Streifen gehören dieser Klasse von Funktionen an; polynomielle Abbildungen sind erforderlich, damit die Gesamtfläche ebenfalls eine Polynomfläche ist). Dies bietet zahlreiche Freiheitsgrade längs der Blending-Streifen (in diese Richtung muss C^2 -Stetigkeit gelten, der Segmentrand sollte gut nachempfunden werden) und wenige quer zu den Blending-Streifen (außer der Breite im dreidimensionalen Raum gibt es hier kaum etwas zu beachten). $\tilde{\mathbf{G}}^\downarrow$ und $\tilde{\mathbf{G}}^\uparrow$ lauten in TP-Bezier-Form

$$\tilde{\mathbf{G}}^\downarrow(U, V) = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^1 B_i^{5,[0,1]}(U) B_j^{1,[0,1]}(V) \mathbf{g}_{i,j}^\downarrow \quad (4.23)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^\uparrow(U, V) = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^1 B_i^{5,[0,1]}(U) B_j^{1,[0,1]}(V) \mathbf{g}_{i,j}^\uparrow \quad (4.24)$$

Die geforderte **Eigenschaft 2** wird durch die folgende **Eigenschaft 2a** ersetzt, die einen ähnlichen Effekt auf den Blending-Bereich hat.

Eigenschaft 2a: Die Richtungsableitungen $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{e}_\perp}^\downarrow(\hat{\mathcal{E}}^\downarrow)$ und $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{e}_\perp}^\uparrow(\hat{\mathcal{E}}^\uparrow)$ senkrecht zu den Kanten $\hat{\mathcal{E}}^\downarrow$ und $\hat{\mathcal{E}}^\uparrow$ an diesen Kanten sollen den gleichen Winkel α bilden wie die Vektoren $\tilde{\mathbf{p}}^0 - \tilde{\mathbf{p}}^\downarrow$ und $\tilde{\mathbf{p}}^0 - \tilde{\mathbf{p}}^\uparrow$ (Abbildung 4.18). Damit wird ebenfalls erreicht, dass der Blending-Bereich den von den Segment-Randpunkten vorgegebenen Winkel nachempfndet.

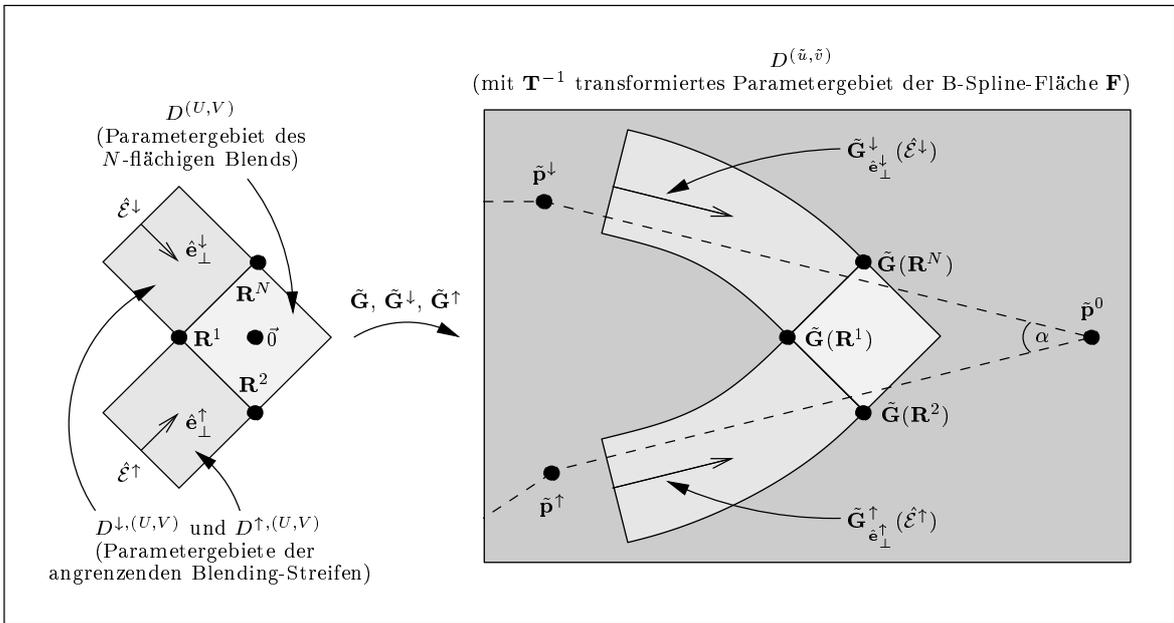


Abbildung 4.18: Die transformierten Parametergebiete bilden den Winkel α

Im Folgenden wird eine Möglichkeit präsentiert, die Kontrollpunkte $\mathbf{g}_{i,j}^\downarrow$ und $\mathbf{g}_{i,j}^\uparrow$ so festzulegen, dass sowohl die Bedingungen (G5) bis (G8) für eine C^2 -stetige Gesamtfläche als auch die **Eigenschaft 2a** erfüllt sind.

Für den Übergang zwischen $\tilde{\mathbf{G}}$ und $\tilde{\mathbf{G}}^\uparrow$ lassen sich die Bedingungen (G5) bis (G8) unter Verwendung der Ansätze (4.22) und (4.24) und der Transformation \mathbf{T} umschreiben zu

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathcal{E}^\uparrow) = (1 - V) \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{R}^2) + V \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{R}^1) = \tilde{\mathbf{G}}^\uparrow(1, V) = (1 - V) \mathbf{g}_{5,0}^\uparrow + V \mathbf{g}_{5,1}^\uparrow$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{e}_\perp}^\uparrow(\mathcal{E}^\uparrow) = \mathcal{R}S\mathbf{e}_\perp^\uparrow = \tilde{\mathbf{G}}_{U}^\uparrow(1, V) \frac{1}{a} = \left((1 - V) (\mathbf{g}_{5,0}^\uparrow - \mathbf{g}_{4,0}^\uparrow) + V (\mathbf{g}_{5,1}^\uparrow - \mathbf{g}_{4,1}^\uparrow) \right) \frac{5}{a}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{e}_\perp \mathbf{e}_\perp}^\uparrow(\mathcal{E}^\uparrow) = 0 = \tilde{\mathbf{G}}_{UU}^\uparrow(1, V) \frac{1}{a^2} =$$

$$= \left((1-V)(\mathbf{g}_{5,0}^\uparrow - 2\mathbf{g}_{4,0}^\uparrow + \mathbf{g}_{3,0}^\uparrow) + V(\mathbf{g}_{5,1}^\uparrow - 2\mathbf{g}_{4,1}^\uparrow + \mathbf{g}_{3,1}^\uparrow) \right) \frac{20}{a^2}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{e}_\perp^\uparrow \mathbf{e}_\parallel^\uparrow}(\mathcal{E}^\uparrow) = 0 = \tilde{\mathbf{G}}_{UV}^\uparrow(1, V) \frac{1}{a} = \left(\mathbf{g}_{5,1}^\uparrow - \mathbf{g}_{4,1}^\uparrow - \mathbf{g}_{5,0}^\uparrow + \mathbf{g}_{4,0}^\uparrow \right) \frac{5}{a} \quad ,$$

wobei \mathbf{R}^1 und \mathbf{R}^2 die in Abbildung 4.18 gekennzeichneten Punkte im Parametergebiet $D^{(U,V)}$ sind. Dies kann zu

$$\mathbf{g}_{5-i,0}^\uparrow = \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{R}^2) - i \frac{a}{5} \mathcal{R}S\mathbf{e}_\perp^\uparrow \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

$$\mathbf{g}_{5-i,1}^\uparrow = \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{R}^1) - i \frac{a}{5} \mathcal{R}S\mathbf{e}_\perp^\uparrow \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

vereinfacht werden. Der in Unterabschnitt 4.2.2 eingeführte, noch unbestimmte Parameter a kann prinzipiell beliebig gewählt werden. Eine sinnvolle Festlegung ist $a = \frac{5\|\mathcal{S}^{-1}\mathbf{d}\|}{2}$ wobei $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{R}^1) + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{R}^2)) - \tilde{\mathbf{G}}(\vec{0})$. Die Parametergebiete des N -flächigen Blends und der angrenzenden Blending-Streifen haben dann etwa die gleiche Größe (siehe Abbildungen 4.19 und 4.20).

Gleiches Vorgehen für den Übergang zwischen $\tilde{\mathbf{G}}$ und $\tilde{\mathbf{G}}^\downarrow$ liefert

$$\mathbf{g}_{5-i,0}^\downarrow = \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{R}^1) - i \frac{a}{5} \mathcal{R}S\mathbf{e}_\perp^\downarrow \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

$$\mathbf{g}_{5-i,1}^\downarrow = \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{R}^N) - i \frac{a}{5} \mathcal{R}S\mathbf{e}_\perp^\downarrow \quad , \quad i = 0, \dots, 2 \quad .$$

Die noch nicht festgelegten Kontrollpunkte werden dazu verwendet, **Eigenschaft 2a** zu erfüllen. Abhängig davon, ob der Winkel α zwischen den Vektoren $\tilde{\mathbf{p}}^0 - \tilde{\mathbf{p}}^\downarrow$ und $\tilde{\mathbf{p}}^0 - \tilde{\mathbf{p}}^\uparrow$ größer oder kleiner als der von den Richtungsableitungen $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{e}_\perp^\downarrow}(\mathcal{E}^\downarrow) = \mathcal{R}S\mathbf{e}_\perp^\downarrow$ und $\tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{e}_\perp^\uparrow}(\mathcal{E}^\uparrow) = \mathcal{R}S\mathbf{e}_\perp^\uparrow$ gebildete Winkel $\frac{2\pi}{N}$ ist, kommt einer der folgenden beiden Fälle zur Anwendung.

Fall 1: $\alpha \geq \frac{2\pi}{N}$

Für die verbleibenden Kontrollpunkte gilt

$$\mathbf{g}_{i,0}^\uparrow = \mathbf{g}_{3,0}^\uparrow + (3-i) \frac{\|\mathbf{d}\|}{2} \mathcal{R}(-\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}) \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

$$\mathbf{g}_{i,1}^\uparrow = \mathbf{g}_{i,0}^\uparrow + \mathcal{R}S(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}) \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

$$\mathbf{g}_{i,1}^\downarrow = \mathbf{g}_{3,1}^\downarrow + (3-i) \frac{\|\mathbf{d}\|}{2} \mathcal{R}(\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}) \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

$$\mathbf{g}_{i,0}^\downarrow = \mathbf{g}_{i,1}^\downarrow + \mathcal{RS}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right) \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

(siehe Abbildung 4.19).

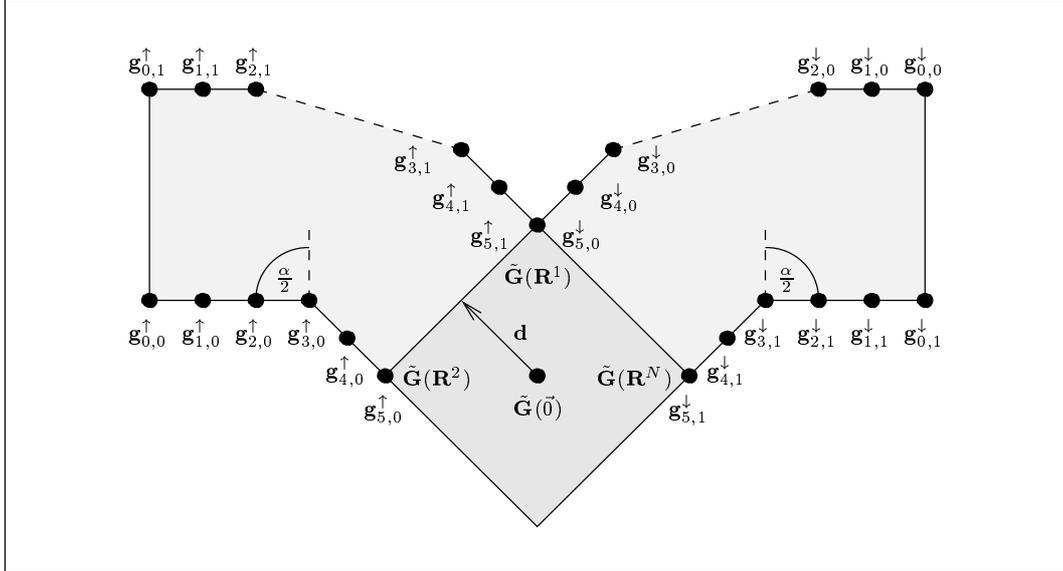


Abbildung 4.19: Die Lage der Kontrollpunkte $\mathbf{g}_{i,j}^\uparrow$ und $\mathbf{g}_{i,j}^\downarrow$ falls $\alpha \geq \frac{2\pi}{N}$

Fall 2: $\alpha < \frac{2\pi}{N}$

Für die verbleibenden Kontrollpunkte gilt

$$\mathbf{g}_{i,1}^\uparrow = \mathbf{g}_{3,1}^\uparrow + (3-i) \frac{\|\mathbf{d}\|}{2} \mathcal{RS}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}\right) \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

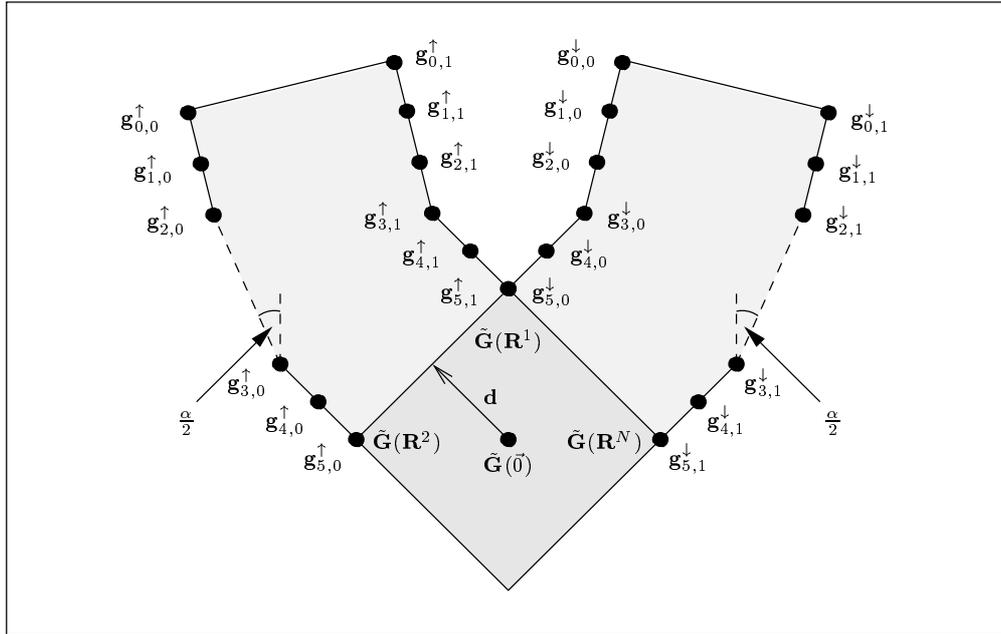
$$\mathbf{g}_{i,0}^\uparrow = \mathbf{g}_{i,1}^\uparrow + \mathcal{RS}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}, -\sin\frac{\alpha}{2}\right) \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

$$\mathbf{g}_{i,0}^\downarrow = \mathbf{g}_{3,0}^\downarrow + (3-i) \frac{\|\mathbf{d}\|}{2} \mathcal{RS}\left(\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}\right) \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

$$\mathbf{g}_{i,1}^\downarrow = \mathbf{g}_{i,0}^\downarrow + \mathcal{RS}\left(\cos\frac{\alpha}{2}, -\sin\frac{\alpha}{2}\right) \quad , \quad i = 0, \dots, 2$$

(siehe Abbildung 4.20).

Die letzte verbleibende Aufgabe besteht in der Berechnung der Matrizen \mathcal{R} und \mathcal{S} und des Vektors \mathbf{t} .

Abbildung 4.20: Die Lage der Kontrollpunkte $\mathbf{g}_{i,j}^{\uparrow}$ und $\mathbf{g}_{i,j}^{\downarrow}$ falls $\alpha < \frac{2\pi}{N}$

Die Skalierungsmatrix S soll die Breite des Blending-Bereiches im transformierten Parametergebiet $D^{(\tilde{u}, \tilde{v})}$ der B-Spline-Fläche auf etwa $d_{\text{innen}} + d_{\text{außen}}$ festlegen. Die Breite des Blending-Bereichs entspricht ungefähr den Abständen $\|\mathbf{g}_{i,0}^{\downarrow} - \mathbf{g}_{i,1}^{\downarrow}\|$ beziehungsweise $\|\mathbf{g}_{i,0}^{\uparrow} - \mathbf{g}_{i,1}^{\uparrow}\|$. Diese Abstände nehmen den Wert $d_{\text{innen}} + d_{\text{außen}}$ an, falls

$$S = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad s = d_{\text{innen}} + d_{\text{außen}}$$

gesetzt wird.

Die Rotationsmatrix \mathcal{R} soll den Blending-Bereich soweit rotieren, dass die Richtungsableitungen $\tilde{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{e}}_{\perp}^{\downarrow}}^{\downarrow}(\hat{\mathcal{E}}^{\downarrow})$ und $\tilde{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{e}}_{\perp}^{\uparrow}}^{\uparrow}(\hat{\mathcal{E}}^{\uparrow})$ parallel zu den Vektoren $\tilde{\mathbf{p}}^0 - \tilde{\mathbf{p}}^{\downarrow}$ und $\tilde{\mathbf{p}}^0 - \tilde{\mathbf{p}}^{\uparrow}$ sind. Ist γ der Winkel, um den der Blending-Bereich rotiert werden muss, dann gilt

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Der Translationsvektor \mathbf{t} ist so zu wählen, dass die Geraden durch $\tilde{\mathbf{p}}^0$ und $\tilde{\mathbf{p}}^{\uparrow}$ beziehungsweise $\tilde{\mathbf{p}}^0$ und $\tilde{\mathbf{p}}^{\downarrow}$ die Strecken $\mathbf{g}_{0,1}^{\uparrow}\mathbf{g}_{0,0}^{\uparrow}$ und $\mathbf{g}_{0,0}^{\downarrow}\mathbf{g}_{0,1}^{\downarrow}$ im Verhältnis $\frac{d_{\text{innen}}}{d_{\text{außen}}}$ teilen. Der Blending-Bereich erstreckt sich dann im Anschlussbereich etwa um d_{innen} nach innen und um $d_{\text{außen}}$ nach außen. \mathbf{t} ergibt sich als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\frac{d_{\text{innen}}}{d_{\text{innen}} + d_{\text{au\ss en}}} \mathbf{g}_{0,0}^{\uparrow}(\mathbf{t}) + \frac{d_{\text{au\ss en}}}{d_{\text{innen}} + d_{\text{au\ss en}}} \mathbf{g}_{0,1}^{\uparrow}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{p}}^0 + \lambda(\tilde{\mathbf{p}}^{\uparrow} - \tilde{\mathbf{p}}^0)$$

$$\frac{d_{\text{innen}}}{d_{\text{innen}} + d_{\text{au\ss en}}} \mathbf{g}_{0,1}^{\downarrow}(\mathbf{t}) + \frac{d_{\text{au\ss en}}}{d_{\text{innen}} + d_{\text{au\ss en}}} \mathbf{g}_{0,0}^{\downarrow}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{p}}^0 + \mu(\tilde{\mathbf{p}}^{\downarrow} - \tilde{\mathbf{p}}^0) .$$

Dieses Gleichungssystem mit vier Unbekannten kann problemlos mit Hilfe des *Gau\ss*-Algorithmus gel\u00f6st werden.

Sind die Transformationen $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{G}}^{\downarrow}$ und $\tilde{\mathbf{G}}^{\uparrow}$ berechnet, muss noch \u00fcberpr\u00fcft werden, ob $\overline{\mathbf{g}_{0,0}^{\uparrow}\mathbf{g}_{0,1}^{\uparrow}}$ die Strecke $\overline{\tilde{\mathbf{p}}^{\uparrow}\tilde{\mathbf{p}}^0}$ mindestens im Verh\u00e4ltnis $\frac{1}{3}$ teilt (bei $\frac{1}{3}$ handelt es sich um einen experimentell ermittelten Wert; Werte in \u00e4hnlicher Gr\u00f6\u00dfenordnung liefern ebenfalls gute Ergebnisse). Ist dies nicht der Fall, liegt $\tilde{\mathbf{p}}^{\uparrow}$ zu nahe an $\tilde{\mathbf{p}}^0$ (die Parametertransformationen der anschlie\u00dfenden Blending-Streifen k\u00f6nnen dann nicht mehr sinnvoll konstruiert werden). Anstelle von $\tilde{\mathbf{p}}^{\uparrow}$ wird der n\u00e4chste Segment-Randpunkt verwendet und die Transformationen $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{G}}^{\downarrow}$ und $\tilde{\mathbf{G}}^{\uparrow}$ werden neu berechnet. Handelt es sich bei $\tilde{\mathbf{p}}^{\uparrow}$ um einen Sternpunkt, das hei\u00dft in seiner Umgebung muss ebenfalls eine Parametertransformation eines N -fl\u00e4chigen Blends platziert werden, muss dieses Verh\u00e4ltnis sogar gr\u00f6\u00dfer als $\frac{5}{3}$ sein. Ist dies nicht der Fall, muss die Rekonstruktion mit anderen Parametern d_{innen} und $d_{\text{au\ss en}}$ erneut gestartet werden. Abbildung 4.21 zeigt ein Beispiel einer Parametertransformation eines 3-fl\u00e4chigen Blends. Der erste Randpunkt in \uparrow -Richtung liegt zu nahe an $\tilde{\mathbf{p}}^0$ und wird daher ignoriert.

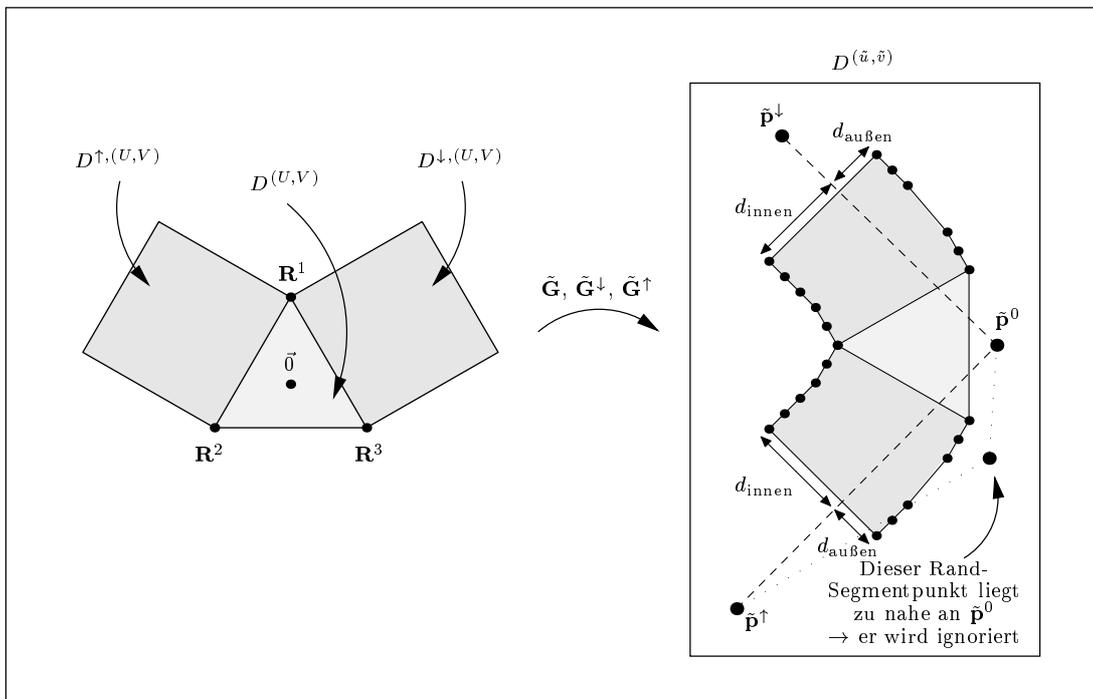


Abbildung 4.21: Die Parametertransformationen $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{G}}^{\downarrow}$ und $\tilde{\mathbf{G}}^{\uparrow}$ eines 3-fl\u00e4chigen Blends

Ein entsprechendes Teilungsverhältnis muss natürlich auch für $\overline{\mathbf{g}_{0,0}^\downarrow \mathbf{g}_{0,1}^\downarrow}$ und die Strecke $\overline{\tilde{\mathbf{p}}^\downarrow \tilde{\mathbf{p}}^0}$ erfüllt sein.

Die Parametertransformationen des N -flächigen Blends und der beiden angrenzenden Blending-Streifen ergeben sich durch Anwendung der Transformation $\mathbf{T}(\mathbf{p}^0)$ auf die Abbildungen $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{G}}^\downarrow$ und $\tilde{\mathbf{G}}^\uparrow$. Die Ergebnisse lauten

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(U, V) &= \mathbf{T}(\mathbf{p}^0)(\tilde{\mathbf{G}}(U, V)) = \mathbf{T}(\mathbf{p}^0) \mathcal{RS} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \mathbf{T}(\mathbf{p}^0) \mathbf{t} \\ \mathbf{G}^\downarrow(U, V) &= \mathbf{T}(\mathbf{p}^0)(\tilde{\mathbf{G}}^\downarrow(U, V)) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^1 B_i^{5,[0,1]}(U) B_j^{1,[0,1]}(V) \mathbf{T}(\mathbf{p}^0) \mathbf{g}_{i,j}^\downarrow \\ \mathbf{G}^\uparrow(U, V) &= \mathbf{T}(\mathbf{p}^0)(\tilde{\mathbf{G}}^\uparrow(U, V)) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^1 B_i^{5,[0,1]}(U) B_j^{1,[0,1]}(V) \mathbf{T}(\mathbf{p}^0) \mathbf{g}_{i,j}^\uparrow .\end{aligned}$$

4.4.3 Abbilden der Parametergebiete der Blending-Streifen in die Parametergebiete der B-Spline-Flächen

Nachdem die Blending-Bereiche der N -flächigen Blends und ihrer angrenzenden Blending-Streifen durch die im letzten Unterabschnitt vorgestellten Parametertransformationen festgelegt wurden, sollen nun jeweils zwei dieser Blending-Bereiche entlang der zugeordneten Segmentränder durch einen Satz von Blending-Streifen verbunden werden. Seien $\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^{m-1}$ die Segment-Randpunkte im Parametergebiet $D^{(u,v)}$ einer B-Spline-Fläche \mathbf{F} , die zwischen zwei Sternpunkten \mathbf{p}^0 und \mathbf{p}^m liegen, über denen N -flächige Blends platziert wurden. Punkte, die das am Ende des letzten Unterabschnitts angesprochene Teilungsverhältnis nicht erfüllen, sind dabei nicht enthalten. Des weiteren seien die Punkte $\mathbf{p}^{0,\text{innen}}$, $\mathbf{p}^{0,\text{außen}}$, $\mathbf{p}^{m,\text{innen}}$ und $\mathbf{p}^{m,\text{außen}}$ die von den an die N -flächigen Blends angrenzenden Blending-Streifen vorgegebenen Anschlusspunkte. Die zu den noch offenen Übergangslinien senkrecht stehenden ersten Richtungsableitungen werden mit $\partial \mathbf{p}^0$ und $\partial \mathbf{p}^m$ bezeichnet, die zweiten Richtungsableitungen mit $\partial^2 \mathbf{p}^0$ und $\partial^2 \mathbf{p}^m$ (Abbildung 4.22). Bei Verwendung der im letzten Unterabschnitt beschriebenen Konstruktion gilt $\partial^2 \mathbf{p}^0 = 0$ und $\partial^2 \mathbf{p}^m = 0$.

Die Punkte $\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^{m-1}$ und die Anschlussbedingungen $\mathbf{p}^{0,\text{innen}}$, $\mathbf{p}^{0,\text{außen}}$, $\mathbf{p}^{m,\text{innen}}$, $\mathbf{p}^{m,\text{außen}}$, $\partial \mathbf{p}^0$, $\partial \mathbf{p}^m$, $\partial^2 \mathbf{p}^0$ und $\partial^2 \mathbf{p}^m$ werden im Folgenden dazu verwendet, eine C^2 -stetige innere und eine C^2 -stetige äußere Segment-Randkurve aufzustellen, die den Blending-Bereich der Blending-Streifen begrenzen.

Die ersten und die zweiten Ableitungen einer die Punkte $\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^{m-1}$ interpolierenden Kurve können mit den Formeln

$$\partial \mathbf{p}^i = \frac{1}{2} (\mathbf{p}^{i+1} - \mathbf{p}^{i-1}) \quad , \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (4.25)$$

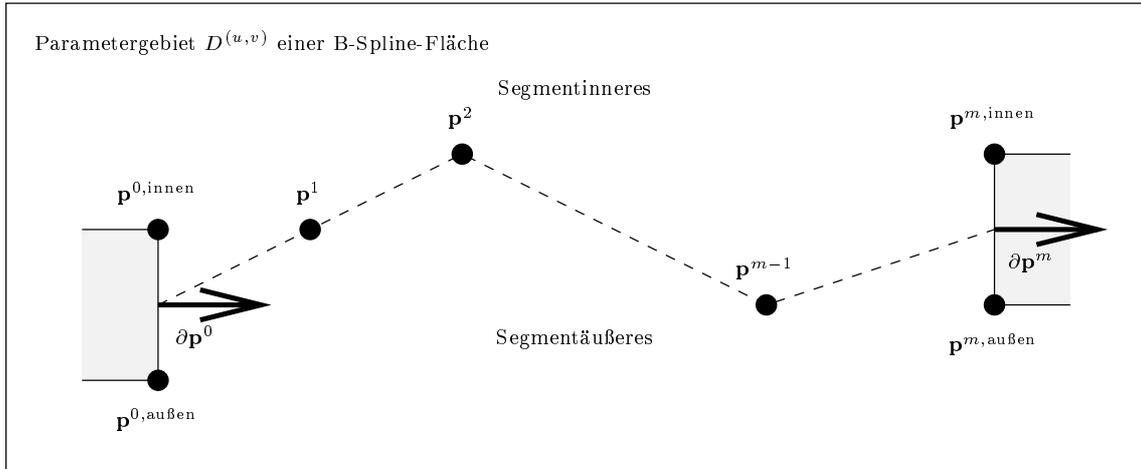


Abbildung 4.22: Ein mit Blending-Streifen zu füllender Segmentrand

$$\partial^2 \mathbf{p}^i = \mathbf{p}^{i+1} - 2\mathbf{p}^i + \mathbf{p}^{i-1} \quad , \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (4.26)$$

geschätzt werden. Man erhält diese Formeln, indem man Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt.

Die geschätzten ersten Ableitungen werden dazu verwendet, Interpolationspunkte für die innere und die äußere Segment-Randkurve zu berechnen. Die zum Punkt \mathbf{p}^i gehörigen Interpolationspunkte werden mit $\mathbf{p}^{i,\text{innen}}$ und $\mathbf{p}^{i,\text{außen}}$ bezeichnet. Sie sind dadurch festgelegt, dass die Vektoren $\tilde{\mathbf{p}}^{i,\text{innen}} - \tilde{\mathbf{p}}^i$ und $\tilde{\mathbf{p}}^{i,\text{außen}} - \tilde{\mathbf{p}}^i$ senkrecht auf den transformierten ersten Ableitung $\partial \tilde{\mathbf{p}}^i$ stehen und die Längen d_{innen} bzw. $d_{\text{außen}}$ haben. Dabei gilt $\tilde{\mathbf{p}}^i = (\mathbf{T}(\mathbf{p}^i))^{-1} \mathbf{p}^i$, $\tilde{\mathbf{p}}^{i,\text{innen}} = (\mathbf{T}(\mathbf{p}^i))^{-1} \mathbf{p}^{i,\text{innen}}$, $\tilde{\mathbf{p}}^{i,\text{außen}} = (\mathbf{T}(\mathbf{p}^i))^{-1} \mathbf{p}^{i,\text{außen}}$ und $\partial \tilde{\mathbf{p}}^i = (\mathbf{T}(\mathbf{p}^i))^{-1} \partial \mathbf{p}^i$ (Abbildung 4.23).

Sind die Punkte $\mathbf{p}^0, \dots, \mathbf{p}^m$ entgegen dem Uhrzeigersinn angeordnet, können die Interpolationspunkte mit den Formeln

$$\perp \partial \mathbf{p}^i = \mathbf{T}(\mathbf{p}^i)(-\partial \tilde{p}_v^i, \partial \tilde{p}_u^i) \frac{1}{\|\partial \tilde{\mathbf{p}}^i\|} \quad , \quad i = 1, \dots, m-1$$

$$\mathbf{p}^{i,\text{innen}} = \mathbf{p}^i + \perp \partial \mathbf{p}^i d_{\text{innen}} \quad , \quad i = 1, \dots, m-1$$

$$\mathbf{p}^{i,\text{außen}} = \mathbf{p}^i - \perp \partial \mathbf{p}^i d_{\text{außen}} \quad , \quad i = 1, \dots, m-1 \quad .$$

berechnet werden.

Da die ermittelten Interpolationspunkte jeweils Grenzen zwischen zwei Blending-Streifen bilden sollen, müssen insgesamt m Parametertransformationen \mathbf{G}^k für m Blending-Streifen bestimmt werden. Wie bereits im letzten Unterabschnitt erläutert, sollen die \mathbf{G}^k bivariate Po-

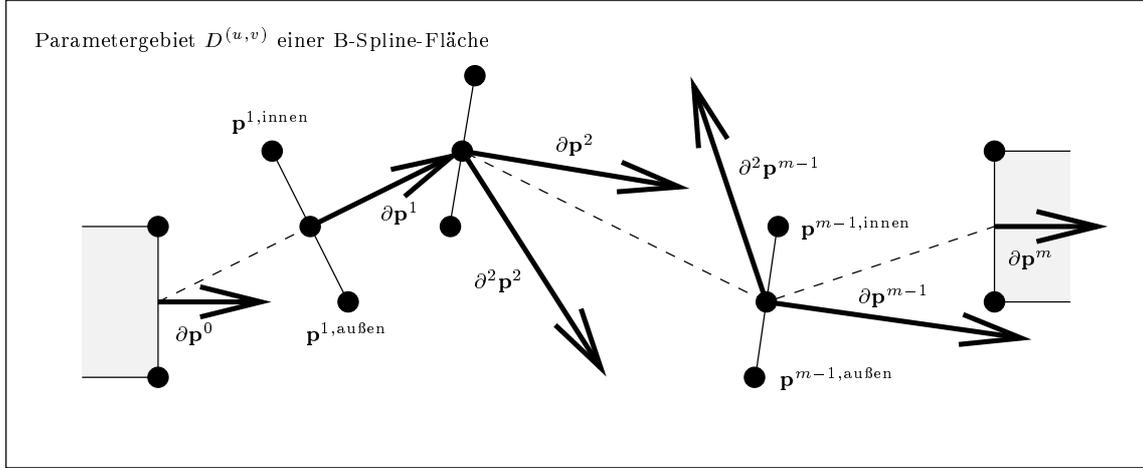


Abbildung 4.23: Geschätzte erste und zweite Ableitungen und neue Interpolationspunkte

lynome vom Grad 5 in U -Richtung und vom Grad 1 in V -Richtung sein. In TP-Bezier-Form lauten sie

$$\mathbf{G}^k(U, V) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^1 B_i^{5,[0,1]}(U) B_j^{1,[0,1]}(V) \mathbf{g}_{i,j}^k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Die oben erwähnten inneren beziehungsweise äußeren Segment-Randkurven werden von den Kurven $\mathbf{G}^k(U, 1)$ beziehungsweise $\mathbf{G}^k(U, 0)$ gebildet. Um die Punkte $\mathbf{p}^{i,\text{innen}}$ und $\mathbf{p}^{i,\text{außen}}$ zu interpolieren, wird $\mathbf{g}_{0,0}^k = \mathbf{p}^{k-1,\text{außen}}$, $\mathbf{g}_{0,1}^k = \mathbf{p}^{k-1,\text{innen}}$, $\mathbf{g}_{5,0}^k = \mathbf{p}^{k,\text{außen}}$ und $\mathbf{g}_{5,1}^k = \mathbf{p}^{k,\text{innen}}$ gesetzt. Damit ist Bedingung (G1) für eine C^2 stetige Gesamtfläche bereits erfüllt.

Die Ableitungen $\mathbf{G}_U^k(0, V)$ und $\mathbf{G}_U^k(1, V)$ entlang der Kanten $(0, V)$ und $(1, V)$, $V \in [0, 1]$, sollen bis auf durch Umparametrisierung erreichbare Faktoren \tilde{a}_k und a_k gleich den geschätzten ersten Ableitungen $\partial \mathbf{p}^{k-1}$ und $\partial \mathbf{p}^k$ sein. Das bedeutet, diese geschätzten ersten Ableitungen geben die Tangenten in U -Richtung vor. Wünschenswert wäre eine etwa äquidistante Verteilung der Kontrollpunkte in U -Richtung, was grob durch die Wahl

$$\mathbf{g}_{1,j}^k = \mathbf{g}_{0,j}^k + \frac{\|\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^{k-1}\|}{5} \frac{\partial \mathbf{p}^{k-1}}{\|\partial \mathbf{p}^{k-1}\|}, \quad j = 0, 1, \quad k = 1, \dots, m \quad (4.27)$$

$$\mathbf{g}_{4,j}^k = \mathbf{g}_{5,j}^k - \frac{\|\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^{k-1}\|}{5} \frac{\partial \mathbf{p}^k}{\|\partial \mathbf{p}^k\|}, \quad j = 0, 1, \quad k = 1, \dots, m \quad (4.28)$$

erreicht wird. Für die unbestimmten Faktoren \tilde{a}_k und a_k , die auch in den Bedingungen (G2) bis (G4) auftreten, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_U^k(0, V) &= 5 \left((1 - V) (\mathbf{g}_{1,0}^k - \mathbf{g}_{0,0}^k) + V (\mathbf{g}_{1,1}^k - \mathbf{g}_{0,1}^k) \right) = \\
&= \underbrace{\frac{\|\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^{k-1}\|}{\|\partial \mathbf{p}^{k-1}\|}}_{=\tilde{a}_k} \partial \mathbf{p}^{k-1} \quad , \quad k = 1, \dots, m \quad (4.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_U^k(1, V) &= 5 \left((1 - V) (\mathbf{g}_{5,0}^k - \mathbf{g}_{4,0}^k) + V (\mathbf{g}_{5,1}^k - \mathbf{g}_{4,1}^k) \right) = \\
&= \underbrace{\frac{\|\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^{k-1}\|}{\|\partial \mathbf{p}^k\|}}_{=a_k} \partial \mathbf{p}^k \quad , \quad k = 1, \dots, m \quad . \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass die Indizes in den Bedingungen (G1) bis (G4) nicht verschiedene Blending-Streifen, sondern die beiden B-Spline-Flächen eines Blending-Streifens indizieren. Die Parametertransformationen in beide B-Spline-Flächen, von denen in diesem Unterabschnitt stets nur eine betrachtet wurde, müssen dieselben \tilde{a}_k und a_k liefern, damit eine C^2 -stetige Gesamtfläche vorliegt, also die Bedingungen (G2) bis (G4) erfüllt sind. Dies ist zwar durch die Wahl der Kontrollpunkte gemäß den Formeln (4.27) und (4.28) näherungsweise, im Allgemeinen jedoch nicht exakt erfüllt. Der Ausweg besteht in einer Mittelung der von (4.29) und (4.30) gelieferten \tilde{a}_k und a_k und einer nachfolgenden Neuberechnung der Kontrollpunkte. Seien $\tilde{a}_{k,1}$ und $a_{k,1}$ die zu der einen B-Spline-Fläche und $\tilde{a}_{k,2}$ und $a_{k,2}$ die zu der anderen B-Spline-Fläche gehörigen Faktoren. Nach Bildung der Mittelwerte $\bar{a}_k = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{k,1} + \tilde{a}_{k,2})$ und $\bar{a}_k = \frac{1}{2}(a_{k,1} + a_{k,2})$ ergeben sich die Kontrollpunkte $\mathbf{g}_{1,j}^k, \dots, \mathbf{g}_{4,j}^k$ gemäß

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{1,j}^k &= \mathbf{g}_{0,j}^k + \frac{\bar{a}_k}{5} \partial \mathbf{p}^{k-1} \quad , \quad j = 0, 1 \quad , \quad k = 1, \dots, m \\
\mathbf{g}_{4,j}^k &= \mathbf{g}_{5,j}^k - \frac{\bar{a}_k}{5} \partial \mathbf{p}^k \quad , \quad j = 0, 1 \quad , \quad k = 1, \dots, m \\
\mathbf{g}_{2,j}^k &= -\mathbf{g}_{0,j}^k + 2 \mathbf{g}_{1,j}^k + \frac{(\bar{a}_k)^2}{20} \partial^2 \mathbf{p}^{k-1} \quad , \quad j = 0, 1 \quad , \quad k = 1, \dots, m \\
\mathbf{g}_{3,j}^k &= -\mathbf{g}_{5,j}^k + 2 \mathbf{g}_{4,j}^k + \frac{(\bar{a}_k)^2}{20} \partial^2 \mathbf{p}^k \quad , \quad j = 0, 1 \quad , \quad k = 1, \dots, m \quad .
\end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass die Bedingungen (G2) bis (G4) dadurch erfüllt sind.

Die Parametertransformationen \mathbf{G}^k tragen mit den Kurven

$$\mathbf{G}^k(U, 1) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^5 B_i^{5,[0,1]}(U) \mathbf{g}_{i,1}^k \quad , \quad k = 1, \dots, m$$

zu den Trimming-Kurven der B-Spline-Fläche \mathbf{F} bei. Nachdem alle Parametertransformationen berechnet wurden, muss für jede B-Spline-Fläche überprüft werden, ob Schnitte zwischen Trimming-Kurven existieren. Ist dies der Fall, wurde der Blending-Bereich zu breit gewählt. Die Rekonstruktion muss mit anderen Parametern d_{innen} und $d_{\text{außen}}$ erneut gestartet werden.

Abbildung 4.24 zeigt ein Parametergebiet einer B-Spline-Fläche, in das die Kontrollpunkte der Parametertransformationen der Blending-Streifen platziert wurden.

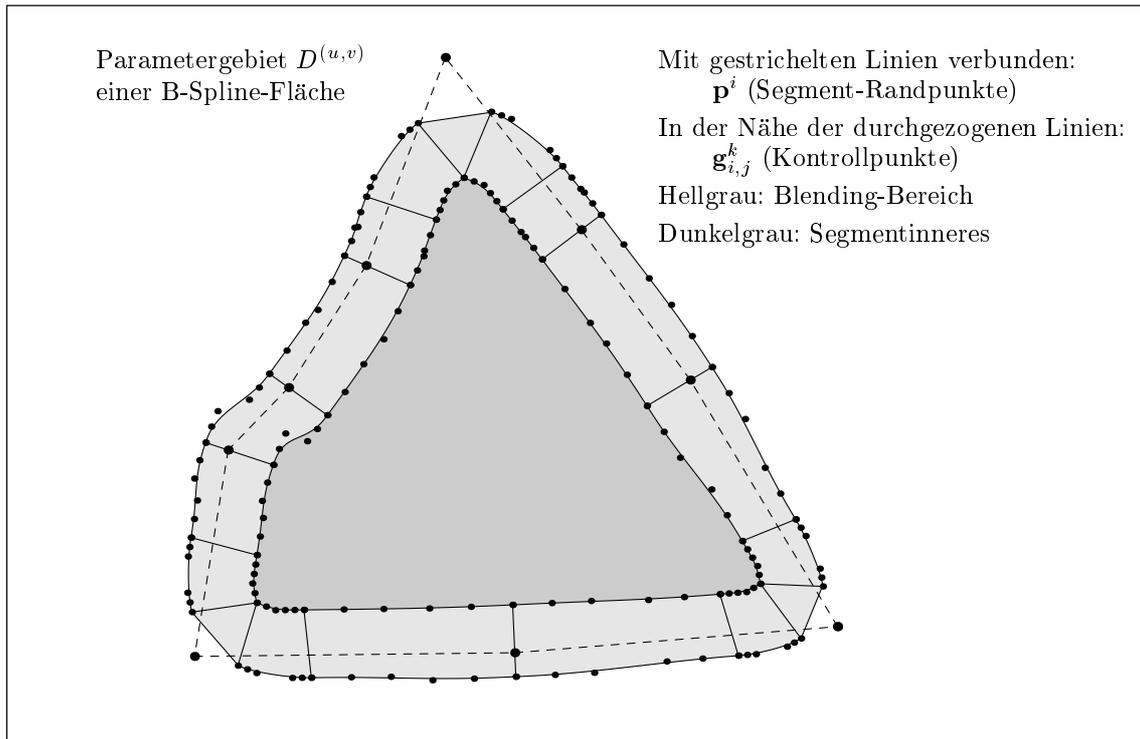


Abbildung 4.24: Die Transformationen in das Parametergebiet einer B-Spline-Fläche

4.5 Zusammenfassung

Im Folgenden soll das in den letzten Abschnitten erläuterte Verfahren noch einmal kurz zusammengefasst werden. Das Wichtige soll herausgestrichen und die einzelnen Elemente zu einem großen Ganzen zusammengefügt werden. Details werden dabei vernachlässigt.

Die Gesamtfläche setzt sich aus drei Arten von Teilflächen zusammen, N -flächigen Blends, Blending-Streifen und getrimmten B-Spline-Flächen.

N -flächige Blends

N -flächige Blends entstehen dort, wo $N \geq 3$ Segmente zusammenstoßen.

N -flächige Blends haben die Form

$$\mathcal{F}(U, V) = \sum_{i=1}^N H^{N,i}(U, V) \cdot \mathbf{F}^i(\mathbf{G}^i(U, V)) \quad .$$

Die Blending-Funktionen H^i sind stets dieselben. Sie müssen also nur einmal berechnet werden (siehe Unterabschnitt 4.3.2).

Die Parametertransformationen \mathbf{G}^i sind im Allgemeinen für alle N -flächigen Blends verschieden. Sie müssen stets neu berechnet werden (siehe Unterabschnitt 4.4.2). Da sie teilweise die Parametertransformationen der Blending-Streifen bestimmen, müssen sie vor der Konstruktion der Blending-Streifen bekannt sein.

Das Parametergebiet der N -flächigen Blends ist ein reguläres N -Eck mit Seitenlänge 1.

Die Blending-Funktionen $H^{N,i}$ sind bivariate Polynome vom Grad (7, 7), die Parametertransformationen \mathbf{G}^i bivariate Polynome vom Grad (1, 1). Bei der Verwendung von bikubischen TP-B-Spline-Flächen als Primärflächen sind N -flächige Blends damit bivariate Polynomflächen vom Grad (13, 13).

Blending-Streifen

Blending-Streifen entstehen dort, wo zwei Segmente zusammenstoßen.

Blending-Streifen haben die Form

$$\mathcal{F}(U, V) = H^\downarrow(U, V) \cdot \mathbf{F}^\downarrow(\mathbf{G}^\downarrow(U, V)) + H^\uparrow(U, V) \cdot \mathbf{F}^\uparrow(\mathbf{G}^\uparrow(U, V)) \quad .$$

Die Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow sind stets dieselben. Sie müssen also nur einmal berechnet werden (siehe Unterabschnitt 4.3.1).

Die Parametertransformationen \mathbf{G}^\downarrow und \mathbf{G}^\uparrow sind im Allgemeinen für alle Blending-Streifen verschieden. Sie müssen stets neu berechnet werden (siehe Unterabschnitt 4.4.3). Da sie teilweise von den Parametertransformationen der N -flächigen Blends bestimmt werden, können sie erst nach diesen konstruiert werden.

Das Parametergebiet der Blending-Streifen ist ein axial ausgerichtetes Quadrat mit Seitenlänge 1.

Die Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow sind bivariate Polynome vom Grad (0, 7), die Parametertransformationen \mathbf{G}^\downarrow und \mathbf{G}^\uparrow bivariate Polynome vom Grad (5, 1). Bei der Verwendung von bikubischen TP-B-Spline-Flächen als Primärflächen sind Blending-Streifen damit bivariate Polynomflächen vom Grad (30, 13).

Getrimmte B-Spline-Flächen

Getrimmte B-Spline-Flächen bilden Teile der Gesamtfläche, die Segment-Innenbereiche repräsentieren.

Da die als Primärflächen verwendeten B-Spline-Flächen bereits vorhanden sind, ist lediglich die Berechnung ihrer Trimming-Kurven von Interesse. Diese Trimming-Kurven ergeben sich direkt aus den Parametertransformationen der Blending-Streifen. Jede Parametertransformation \mathbf{G}^\downarrow beziehungsweise \mathbf{G}^\uparrow eines Blending-Streifens bildet den Parameterbereich dieses Streifens in das Parametergebiet einer B-Spline-Fläche ab. Sie trägt mit der Kurve $\mathbf{G}^\downarrow(U, 0)$ beziehungsweise mit der Kurve $\mathbf{G}^\uparrow(U, 1)$ zu den Trimming-Kurven dieser B-Spline-Fläche bei. Die Trimming-Kurven sind Polynomkurven vom Grad 5.

Bei der Rekonstruktion einer C^2 -stetigen Fläche ist nach folgendem Schema vorzugehen:

1	Segmentiere das gegebene Dreiecksnetz in M Segmente.
2	Parametrisiere jedes dieser M Segmente.
3	Approximiere jedes dieser M Segmente durch eine bikubische B-Spline-Fläche.
4	Berechne die Blending-Funktionen H^\downarrow und H^\uparrow für Blending-Streifen ein einziges Mal (können für jede weitere Rekonstruktion wieder verwendet werden; Unterabschnitt 4.3.1).
5	Berechne die Blending-Funktionen $H^{N,i}$ für N -flächige Blends ein einziges Mal (können für jede weitere Rekonstruktion wieder verwendet werden; Unterabschnitt 4.3.2).
6	Lege die Parameter d_{innen} und $d_{\text{außen}}$ fest (dadurch kann die Größe und die Form der Blending-Flächen gesteuert werden).
7	Berechne die Parametertransformationen aller N -flächigen Blends (ein N -flächiger Blend für jeden Sternpunkt; Unterabschnitt 4.4.2). → N -flächige Blends sind vollständig bestimmt.
8	Berechne die Parametertransformationen aller Blending-Streifen (Unterabschnitt 4.4.3). → Blending-Streifen sind vollständig bestimmt.
9	Berechne die Trimming-Kurven aller B-Spline-Flächen aus den Parametertransformationen der Blending-Streifen. → Getrimmte B-Spline-Flächen sind vollständig bestimmt.
10	Die C^2 -stetige Gesamtfläche setzt sich aus den in den Zeilen 7 bis 9 gewonnenen Teilflächen zusammen.

4.6 Rekonstruktionsstrategien und Ergebnisse

Bei dem hier präsentierten Verfahren zur Rekonstruktion von C^2 -stetigen Oberflächen handelt es sich um ein interaktives Verfahren. Die erzielten Ergebnisse hängen teilweise stark von den Eingaben und Aktionen des Benutzers ab. In diesem Abschnitt werden Hinweise gegeben, mit welchen Strategien gute Ergebnisse erzielt werden können.

Die farbliche Darstellung aller rekonstruierter Oberflächen in diesem Kapitel wurde folgendermassen gewählt:

Gelb: N -flächige Blends.

Grün: An N -flächige Blends angrenzende Blending-Streifen (ihre Parametertransformationen werden zusammen mit den Parametertransformationen der N -flächigen Blends konstruiert).

Rot: Blending-Streifen, die nicht an N -flächige Blends angrenzen.

Blau: Getrimmte B-Spline-Flächen.

4.6.1 Segmentierung

Bereits die Segmentierung des gegebenen Dreiecksnetzes nimmt starken Einfluss auf das spätere Endergebnis. Folgende Regeln sollten dabei beachtet werden:

- **Die einzelnen Segmente sollten etwa die gleiche Größe aufweisen.** Da die maximal zulässige Breite des Blending-Bereichs von den kleinsten Segmenten festgelegt wird, kann es bei stark differierenden Segmentgrößen zu unerwünscht schmalen beziehungsweise kleinen Blending-Flächen kommen.
- **Die Segmentränder sollten möglichst glatt sein.** Je zackiger die Segmentränder sind, desto wahrscheinlicher ist eine Überfaltung der von den Parametertransformationen der Blending-Streifen festgelegten Blending-Bereiche. Dies kann zu unerwünschten Ergebnissen bei der rekonstruierten Fläche führen.
- **Die Winkel, die von den Segmenträndern an Sternpunkten gebildet werden, sollten etwa gleich sein.** Unterschiede von $\pm 50\%$ stellen dabei kein Problem dar, ist aber einer der Winkel mehr als doppelt so groß, sollte eine andere Segmentierung gewählt werden.

Abbildung 4.25 zeigt deutlich, wie stark der Einfluss der Segmentierung auf eine rekonstruierte Oberfläche sein kann. In der oberen Bildreihe stoßen im Zentrum des L-förmigen Körpers drei Segmente zusammen, deren Winkel an dieser Stelle 270° und zweimal 90° betragen. Diese Segmentierung führt zu einem relativ unschönen Ergebnis, wie die Detailaufnahme ganz

rechts zeigt. Die andere Segmentierung in der unteren Bildzeile, bei der am selben Punkt fünf Segmente mit jeweils 90° -Winkeln zusammenstoßen, führt zu einer nahezu perfekten Oberfläche.

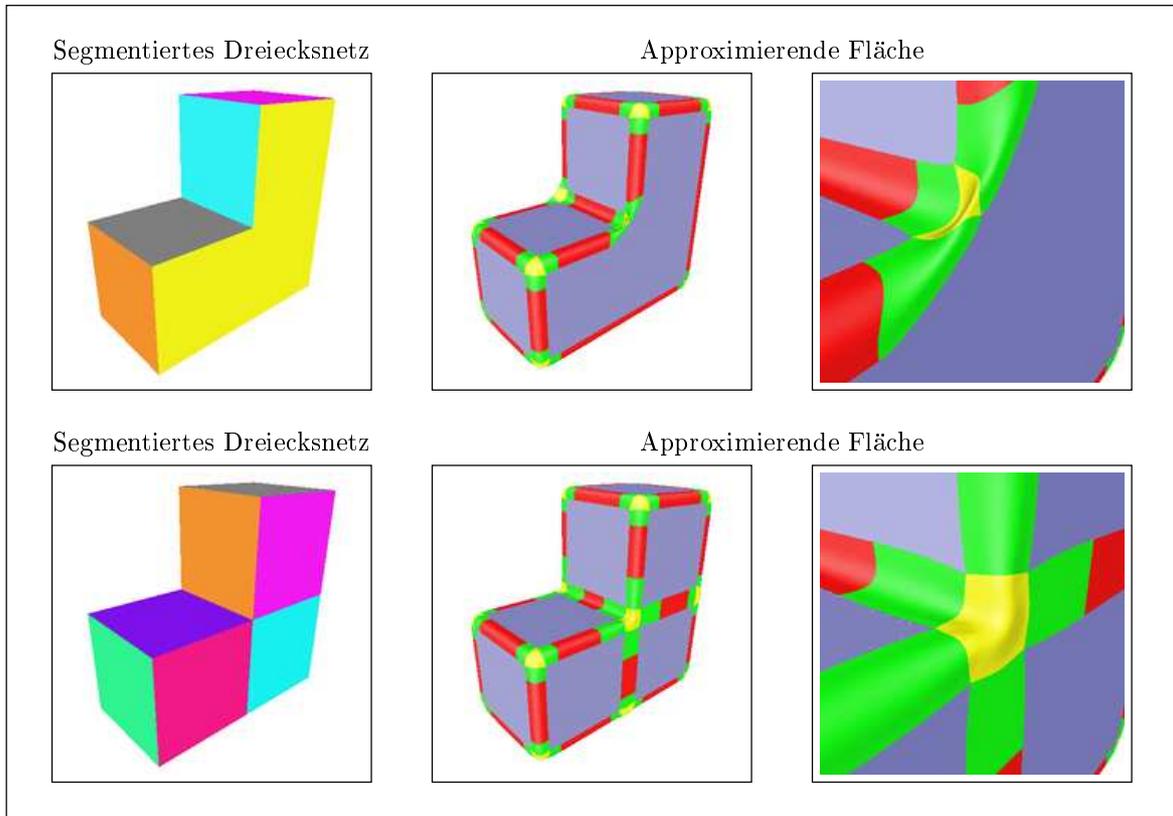


Abbildung 4.25: Ergebnisse bei unterschiedlicher Segmentierung

4.6.2 Festlegen der Blending-Bereiche durch d_{innen} und $d_{\text{außen}}$

Die Lage der Blending-Bereiche kann durch die Parameter d_{innen} und $d_{\text{außen}}$ gesteuert werden. Folgende Regeln sollte man dabei beachten:

- **Die Blending-Bereiche sollten nicht zu schmal sein:** Ist $d_{\text{innen}} + d_{\text{außen}}$ sehr klein, kommt es an den Rändern der Blending-Bereiche zu relativ scharfen Knicks. Dadurch werden die durch die Blending-Flächen erzeugten Übergänge sehr hart. Die optische Glattheit geht damit verloren.
- **Die Blending-Bereiche sollten nicht zu weit im Segmentinneren liegen:** Bei großem d_{innen} kommt es häufig zu Schnitten zwischen den Trimming-Kurven in den

Parametergebieten der B-Spline-Flächen. Eine C^2 -stetige Rekonstruktion wird damit unmöglich (Unterabschnitt 4.4.3).

- **Die Blending-Bereiche sollten sich verhältnismäßig nicht zu weit ins Segmentäußere erstrecken:** Bei großem $d_{\text{außen}}$ und kleinem d_{innen} kommt es meist zu scharfen Knicks in der Mitte der Blending-Flächen. In Extremfällen erhält man sogar eine sich überfaltende Gesamfläche.

Abbildung 4.26 zeigt vier Rekonstruktionen desselben deformierten Tetraeders mit jeweils unterschiedlicher Wahl von d_{innen} und $d_{\text{außen}}$.

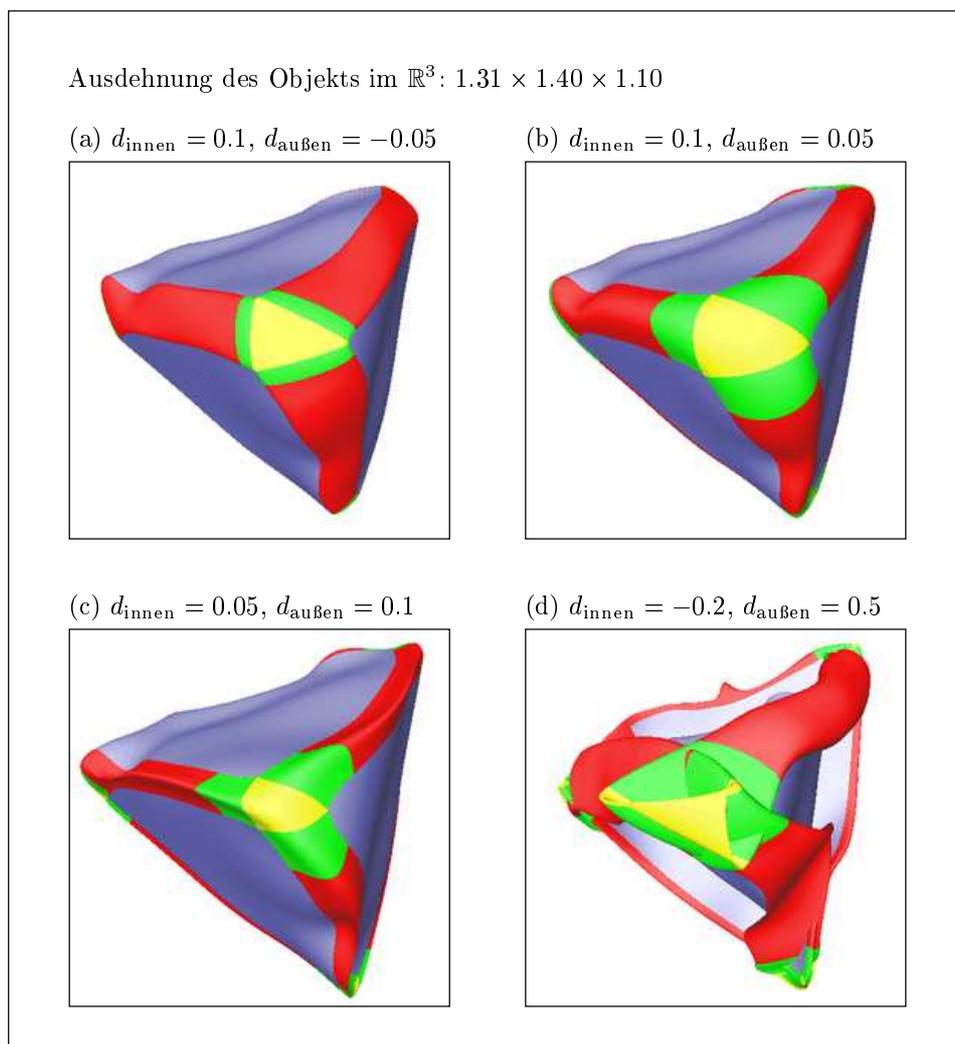


Abbildung 4.26: Ergebnisse bei unterschiedlicher Platzierung des Blending-Bereichs

Bild (a): Die Blending-Bereiche sind zu schmal. Es kommt zu scharfen Knicks an den Rändern der Blending-Bereiche.

Bild (b): Ein sehr schönes Ergebnis. Das hier verwendete Verhältnis $d_{\text{innen}} = 2 d_{\text{außen}}$ liefert in den meisten Fällen gute Ergebnisse.

Bild (c): Die Blending-Bereiche liegen verhältnismäßig zu weit außen. Es kommt zu scharfen Knicks in der Mitte der Blending-Flächen.

Bild (d): Die Blending-Bereiche liegen verhältnismäßig viel zu weit außen. Diese unsinnige Wahl der Parameter d_{innen} und $d_{\text{außen}}$ liefert eine sich mehrfach überfaltende Oberfläche.

4.6.3 Löschen von Segment-Randpunkten

Da jeder Segment-Randpunkt Ausgangspunkt einer Grenze zwischen zwei Blending-Streifen ist (Sternpunkte bilden hierbei eine Ausnahme), ist die Zahl der erzeugten Blending-Flächen bei Dreiecksnetzen, die viele Punkte enthalten, unerwünscht hoch. Dies führt zu unnötig großem Aufwand bei Berechnung, Darstellung und Speicherung der resultierenden Gesamtfläche. Werden bei derartigen Dreiecksnetzen zackige Segmentränder und breite Blending-Bereiche definiert, kommt es teilweise zu wesentlich schlechteren Ergebnissen als bei Verwendung von Dreiecksnetzen, die nur wenige Punkte enthalten.

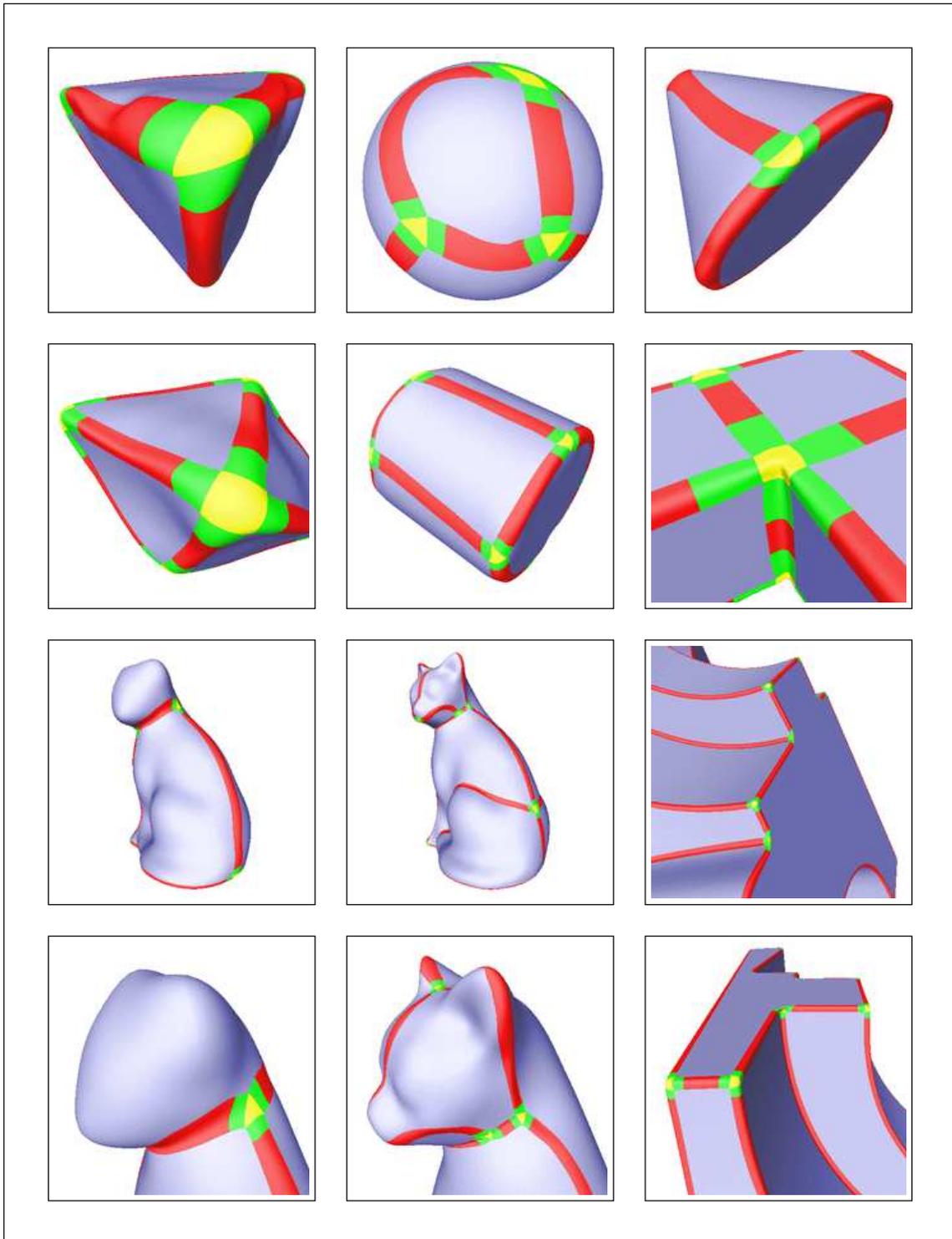
Aufgrund dieser Tatsachen wurde d_{min} , ein weiterer vom Benutzer vorzugebender Parameter, eingeführt. Vor der Berechnung der Parametertransformationen werden solange Segment-Randpunkte gelöscht (nur solche, bei denen es sich nicht um Sternpunkte handelt), bis keine benachbarten Punkte mehr existieren, deren Abstand im \mathbb{R}^3 weniger als d_{min} beträgt. Als sinnvolle Wahl hat sich $d_{\text{min}} = d_{\text{innen}} + d_{\text{außen}}$ erwiesen. Die meisten Blending-Streifen sind dann mindestens so lang wie breit.

4.6.4 Korrektur der Parameterwerte der Segment-Randpunkte

Wie bereits im letzten Unterabschnitt erwähnt, führt ein zackiger Segmentrand oft zu Überfaltungen der Parametertransformationen der Blending-Streifen und damit zu unschönen Ergebnissen. Meistens schafft eine bessere Segmentierung Abhilfe. In einigen Fällen jedoch ist eine solche Segmentierung wegen der ungünstigen Ausrichtung der Dreiecke unmöglich.

Ein Ausweg besteht darin, die Parameterwerte der Segment-Randpunkte zu verändern und dadurch den Segmentrand zu glätten. Alle Segment-Randpunkte \mathbf{p}^i , bei denen es sich nicht um Sternpunkte handelt, werden in Richtung der geschätzten zweiten Ableitungen $\partial^2 \mathbf{p}^i$ der diese Randpunkte interpolierenden Kurve verschoben. Diese zweiten Ableitungen können mit Formel 4.26 aus Unterabschnitt 4.4.3 berechnet werden. Die Parameterpunkte werden gemäß $\mathbf{p}^i \rightarrow \mathbf{p}^i + d_{\partial^2} \partial^2 \mathbf{p}^i$ verändert, wobei d_{∂^2} ein vom Benutzer vorzugebender Parameter ist. Der für 90° -Winkel berechnete optimale Wert $d_{\partial^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ liefert in den meisten Fällen gute Ergebnisse.

Abschließend sind in Abbildung 4.27 eine Reihe von C^2 -stetigen Oberflächen zu sehen, die mit dem hier präsentierten Verfahren rekonstruiert wurden.

Abbildung 4.27: C^2 -stetige Rekonstruktionen verschiedener Oberflächen

4.7 Ausblick

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Ausblick auf eine mögliche zukünftige Entwicklung des hier präsentierten Verfahrens gegeben.

Zuerst sollte erwähnt werden, dass es sich bei diesem Verfahren um einen völlig neuartigen Ansatz handelt. Es existieren weder Methoden, die in ähnlicher Weise Blending-Funktionen und Parametertransformationen zur Erzeugen stückweiser Blending-Flächen verwenden, noch Methoden, die sich überhaupt mit der hier bearbeiteten Problemstellung, Realisierung C^2 -stetiger Übergänge zwischen beliebig getrimmten B-Spline-Flächen, befassen. Das hier vorgestellte Verfahren zur C^2 -stetigen Oberflächenrekonstruktion ist daher kein erschöpfend behandelte Aspekt eines lange bekannten und hinreichend erforschten Prinzips, sondern eine neue Idee, in der noch großes Potential enthalten ist. Dementsprechend ist die Liste der möglichen Ansatzpunkte für zukünftige Forschungsaktivitäten und Weiterentwicklungen sehr lang. Einige Punkte dieser Liste werden im Folgenden kurz angesprochen.

Erweiterung für nicht geschlossene Dreiecksnetze: Momentan funktioniert das Verfahren nur für geschlossene Dreiecksnetze. Eine Erweiterung für nicht geschlossene Dreiecksnetze sollte nach ähnlichem Schema möglich sein. Es müssen neue Blending-Funktionen für Sternpunkte konstruiert werden, die auf dem Rand des Dreiecksnetzes liegen. Da für diese Funktionen mehr Freiheitsgrade vorhanden sind als für die bisher berechneten Blending-Funktionen, sollte das problemlos möglich sein. Darüber hinaus müssen die Parametertransformationen am Rand entsprechend modifiziert werden. Eine Methode zur Berechnung von Trimming-Kurven, die in der Nähe des Dreiecksnetz-Randes verlaufen, würde diese Erweiterung komplettieren.

Verschiedene Breiten der Blending-Bereiche: Weisen die Segmente des Dreiecksnetzes stark unterschiedliche Größen auf, wird momentan die maximale Breite der Blending-Bereiche durch die kleinsten Segmente bestimmt (Unterabschnitt 4.6.2). Eine adaptive Wahl der Breite der Blending-Bereiche und damit auch der Blending-Flächen, zum Beispiel abhängig von der Segmentgröße oder von anderen vom Benutzer vorzugebenden Kriterien, würde die Segmentierung weniger einschränken und mehr Freiheitsgrade für die Oberflächenrekonstruktion liefern.

Verbesserte Lokalisierung der Blending-Bereiche: Momentan werden die Blending-Bereiche ausschließlich an den Segment-Randpunkten orientiert. Eine genauere Lokalisierung, zum Beispiel durch Berechnung der Schnittkurve benachbarter Primärflächen (Kapitel 3) oder zumindest Näherung dieser bei numerischen Problemen, würde die Ergebnisse sicher deutlich verbessern.

Verbesserte Breitenabschätzung der Blending-Bereiche: Da die Transformation \mathbf{T} (Unterabschnitt 4.4.1) eine Transformation ist, die Abstands- und Winkelumrechnungen nur lokal gültig macht, kann es bei relativ breiten Blending-Bereichen zu völlig falschen Abschätzungen und damit zu unerwünschten Ergebnissen kommen. Eine numerische Be-

rechnung der Blending-Bereich-Breiten würde diese Ungenauigkeiten ausschließen und zu besseren Resultaten führen.

Adaptive Wahl der Parametergebiete der Blending-Funktionen: Momentan liefert das Rekonstruktionsverfahren relativ unschöne Ergebnisse bei N -flächigen Blends, wenn sich die Winkel der Segmentränder an den zugeordneten Sternpunkten stark unterscheiden (Unterabschnitt 4.6.1). Eine auf diese Winkel abgestimmte Wahl der Parametergebiete der Blending-Funktionen (unsymmetrische N -Ecke statt reguläre N -Ecke) könnte bei diesem Problem für Abhilfe sorgen. Natürlich müssen dafür neue Blending-Funktionen konstruiert beziehungsweise die gegenwärtig existierenden $H^{N,i}$ modifiziert werden. Ein derartiges Vorgehen macht eventuell auch die speziellen, an N -flächige Blends angrenzenden Blending-Streifen überflüssig, da die von den Segmenträndern gebildeten Winkel in die Parametergebiete und damit die Parametertransformationen der N -flächigen Blends eingehen.

Parametertransformationen mit mehreren Freiheitsgraden: Die in Abschnitt 4.4 vorgestellte Konstruktion von Parametertransformationen für N -flächige Blends und für Blending-Streifen stellt nur eine von vielen Möglichkeiten dar. Es handelt sich wohl um eine der einfachsten derjenigen Konstruktionen, die C^2 -stetige Flächen liefern und die die Blending-Bereiche in der Nähe der Segmentränder platzieren. Die Verwendung von Ansätzen mit mehr Freiheitsgraden vor allem für die Parametertransformationen der N -flächigen Blends (momentan handelt es sich dabei nur um affine Abbildungen) könnte die Ergebnisse deutlich verbessern beziehungsweise dem Benutzer weitere Möglichkeiten bieten, Einfluss auf die zu rekonstruierende Oberfläche zu nehmen.

Wie bereits gesagt, ist diese Aufstellung keineswegs vollständig. Es gibt eine Vielzahl weiterer Ideen und Ansatzpunkte für Verbesserungen und Weiterentwicklungen. Sie soll dem an diesem Thema interessierten Leser lediglich als Anregung für eigene Forschungsaktivitäten dienen.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Im Folgenden werden noch einmal kurz die wesentlichen Forschungsergebnisse dieser Diplomarbeit zusammengefasst.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde sowohl eine Methode zur Realisierung harter C^0 -stetiger Übergänge als auch eine Methode zur Realisierung glatter C^2 -stetiger Übergänge zwischen Flächen, die ein gegebenes Dreiecksnetz approximieren, entwickelt.

Das in Kapitel 3 vorgestellte Verfahren zur Erzeugung C^0 -stetiger Übergänge zwischen Primärflächen basiert auf Berechnung geeigneter Trimming-Kurven. Diese Trimming-Kurven sind Approximationen der Schnittkurven dieser Flächen in deren Parametergebieten.

Bei der in Abschnitt 3.3 präsentierten Methode zur *Taylor*-Entwicklung einer Schnittkurve handelt es sich um ein neu entwickeltes mathematisches Verfahren, mit dem bei Kenntnis eines Punktes auf der Schnittkurve deren Ableitungen an diesem Punkt bis zu beliebig hoher Ordnung exakt berechnet werden können. Durch diese Ableitungen kann eine beliebig genaue Approximation der Schnittkurve in Form ihrer *Taylor*-Entwicklung angegeben werden. Das Verfolgen der gesuchten Schnittkurve kann durch diese Approximationen sehr präzise erfolgen. Dementsprechend treten Probleme mit der Konvergenz des nachfolgenden *Newton*-Verfahrens selbst bei großen Schrittweiten nur sehr selten auf.

Auf die Interpolation einer auf einer Schnittkurve liegenden Punktfolge wurde in bisherigen Arbeiten erstaunlicherweise kaum eingegangen. In Form der bereits angesprochenen *Taylor*-Entwicklungen liegen wertvolle Informationen über die zu approximierenden Schnittkurven an den berechneten Interpolationspunkten vor. Diese Informationen werden, wie in Unterabschnitt 3.5.2 beschrieben, zur Bestimmung stückweiser polynomieller Trimming-Kurven verwendet.

In Unterabschnitt 3.5.4 wurde die quadratische Konvergenz des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens gezeigt.

Zur Erzeugung einer C^2 -stetigen Gesamtfläche aus approximierenden Primärflächen wurde eine völlig neuartige Methode entwickelt, die kaum Ähnlichkeiten mit herkömmlichen Verfahren besitzt. Durch sie ist es möglich, eine C^2 -stetige approximierende Oberfläche eines geschlossenen Dreiecksnetzes zu berechnen. Die glatten Übergänge zwischen den Primärflächen werden durch Blending-Flächen realisiert. Die Übergänge zwischen den einzelnen Teilflächen und deren ersten und zweiten Ableitungen sind absolut exakt.

Bei den Blending-Flächen handelt es sich um additive Kombinationen der ineinander überzublendenden Primärflächen, wobei diese mit speziell konstruierten Blending-Funktionen (Abschnitt 4.3) gewichtet werden. Um verschiedene Flächen sinnvoll addieren zu können, muss eine Beziehung zwischen deren Parametergebieten hergestellt werden. Dies geschieht durch die in Abschnitt 4.4 konstruierten Parametertransformationen.

Diese Parametertransformationen bestimmen über die durch sie festgelegten Blending-Bereiche die Form der resultierenden Gesamtfläche. Der Benutzer kann durch verschiedene Parameter die Lage dieser Blending-Bereiche und damit auch das Rekonstruktionsergebnis steuern.

Obwohl Reverse-Engineering seit Jahren ein aktuelles Forschungsthema ist, existieren noch immer zahlreiche ungelöste oder unbefriedigend gelöste Probleme. Diese Diplomarbeit trägt durch die in ihr präsentierten Ansätze, Methoden und Lösungsmöglichkeiten sicherlich einen weiteren Stein zu diesem großen Puzzle bei. Gerade bei dem in Kapitel 4 präsentierten Verfahren zur Realisierung C^2 -stetiger Übergänge handelt es sich nicht um ein lange bekanntes und hinreichend erforschtes Verfahren, sondern um einen neuartigen Ansatz, mit dem erste sehr gute Ergebnisse erzielt werden konnten. Möglicherweise stellt dieser Ansatz einen ersten Schritt in eine völlig neue Richtung dar. Wie in Abschnitt 4.7 bereits angesprochen, existieren zahlreiche Ansatzpunkte für notwendige Weiterentwicklungen und Verbesserungen. Viel Arbeit und großer Einsatz wird noch zu erbringen sein, bevor dieses Verfahren als universell anwendbar gelten kann und die damit erzielten Ergebnisse vom Benutzer auf komfortable Art und Weise kontrolliert werden können. Es bleibt zu hoffen, dass diese Arbeit Anstoß zu derartigen Forschungsaktivitäten geben wird.

Literaturverzeichnis

- [AbYe96] K. Abdel-Malek, H.-J. Yeh. *Determining intersection curves between surfaces of two solids*. Computer-Aided Design, Volume 28, Number 6/7. 1996.
- [AbYe97] K. Abdel-Malek, H.-J. Yeh. *On the determination of starting points for parametric surface intersections*. Computer-Aided Design, Volume 29, Number 1. 1997.
- [AzBa90] N. M. Aziz, R. Bata. *Bezier Surface/Surface Intersection*. IEEE Computer Graphics and Applications, Volume 10, Number 1. 1990.
- [BaFa87] R. E. Barnhill, G. Farin, M. Jordan, B. R. Piper. *Surface/surface intersection*. Computer Aided Geometric Design, Volume 4. 1987.
- [BoSw73] C. de Boor, B. Swartz. *Collocation at Gaussian Points*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 10, Number 4. 1973.
- [BrSe97] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch. 1997.
- [EcHo96] M. Eck, H. Hoppe. *Automatic Reconstruction of B-Spline Surfaces of Arbitrary Topological Type*. ACM SIGGRAPH. 1996.
- [FaSv96] R. A. M. T. Farouki, R. Sverrisson. *Approximation of rolling-ball blends for free-form parametric surfaces*. Computer-Aided Design, Volume 28, Number 11. 1996.
- [Fari96] G. E. Farin. *Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide*. Academic Press. 1996.
- [Figu96] L. H. de Figueiredo. *Surface intersection using affine arithmetic*. Graphics Interface. 1996.
- [GrKa02] G. Greiner, J. Kaminski, S. Bergler. *Skript zur Vorlesung „Geometric Modelling“*. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 2002.
- [GrKl97] T. A. Grandine, F. W. Klein. *A new approach to the surface intersection problem*. Computer Aided Geometric Design, Volume 14. 1997.
- [GrNe01] G. Greiner, A. Nenni, S. Meinschmidt. *Skript zur Vorlesung „Computer Graphics“*. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 2001.

- [GrRi01] G. Greiner, M. von Rimscha. *Skript zur Vorlesung „Graphical Algorithms“*. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 2001.
- [GrSe93] G. Greiner, H.-P. Seidel. *Curvature continuous blend surfaces*. Modeling in Computer Graphics. Springer. 1993.
- [Grab95] H. Grabmüller. *Mathematik für Ingenieure 1 (für Elektrotechniker)*. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 1995.
- [Grab98a] H. Grabmüller. *Mathematik für Ingenieure 2 (für Informatiker)*. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 1998.
- [Grab98b] H. Grabmüller. *Mathematik für Ingenieure 3 (für Informatiker)*. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 1998.
- [Grab00] H. Grabmüller. *Numerik 1 (für Ingenieure)*. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 2000.
- [Grab01] H. Grabmüller. *Numerik 2 (für Ingenieure)*. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 2001.
- [Grei94] G. Greiner. *Blending surfaces with Minimal Curvature*. Proc. Dagstuhl Workshop Graphics and Robotics. Springer. 1994.
- [Grei00] G. Greiner. *Rekonstruktion glatter Flächen aus diskreten Daten*. Projekt A2, Sonderforschungsbereich 603, Modellbasierte Analyse und Visualisierung komplexer Szenen und Sensordaten, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 2000.
- [Hart98] E. Hartmann. *Numerical implicitization for intersection and G^n -continuous blending of surfaces*. Computer Aided Geometric Design, Volume 15. 1998.
- [HeKo96] T. Hermann, Z. Kovács, T. Várady. *Special Applications in Surface Fitting*. Theory and practice of geometric modeling. 1996.
- [Horm01] K. Hormann. *Theory and Applications of Parameterizing Triangulations*. Dissertation an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 2001.
- [HuMa97] C.-Y. Hu, T. Maekawa, N. M. Patrikalakis, X. Ye. *Robust interval algorithm for surface intersections*. Computer-Aided Design, Volume 29, Number 9. 1997.
- [HuSu97] Y.-P. Hu, T.-C. Sun. *Moving a B-Spline surface to a curve - a trimmed surface matching algorithm*. Computer-Aided Design, Volume 29, Number 6. 1997.
- [KoMa00] G. Kós, R. R. Martin, T. Várady. *Methods to recover constant radius rolling ball blends in reverse engineering*. Computer Aided Geometric Design, Volume 17, Number 2. 2000.

- [KrMa97] S. Krishnan, D. Manocha. *An Efficient Surface Intersection Algorithm Based on Lower-Dimensional Formulation*. ACM Transactions on Graphics, Volume 16, Number 1. 1997.
- [LePe02] B. Lévy, S. Petitjean, N. Ray, J. Maillot. *Least Squares Conformal Maps for Automatic Texture Atlas Generation*. 2002.
- [Loop94] C. Loop. *A G^1 triangular spline surface of arbitrary topological type*. Computer Aided Geometric Design, Volume 11. 1994.
- [MiBr95] M. J. Milroy, C. Bradley, G. W. Vickers, D. J. Weir. *G^1 continuity of B-spline surface patches in reverse engineering*. Computer-Aided Design, Volume 27, Number 6. 1995.
- [Muel90] G. Müllenheim. *Convergence of a surface/surface intersection algorithm*. Computer Aided Geometric Design, Volume 7. 1990.
- [Niem96] H.Niemann. *Skript zur Vorlesung „Mustererkennung 2“*. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 1996.
- [Niem97] H.Niemann. *Skript zur Vorlesung „Mustererkennung 1“*. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 1997.
- [Olof99] R. Oloff. *Geometrie der Raumzeit*. Vieweg. 1999.
- [Pete01] J. Peters. *C^2 Free-Form Surfaces of degree (3,5)*. 2001.
- [PiTi95] L. Piegel, W. Tiller. *The NURBS Book*. Springer. 1995.
- [PrTe97] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press. 1997.
- [VaBe98] T. Várady, P.Benkő, G.Kós. *Reverse engineering regular objects: Simple segmentation and surface fitting procedures*. International Journal of Shape Modeling, Volume 4, Numbers 3 & 4. 1998.
- [VaBe99] T. Várady, P.Benkő, G.Kós, G. Renner, V. Weiß. *Segmentation and Surface Fitting in Reverse Engineering*. Machining Impossible Shapes. Kluwer Academic. 1999.
- [VaHo98] T. Várady, C. M. Hoffmann. *Vertex Blending: Problems and Solutions*. Mathematical Methods for Curves and Surfaces II. 1998.
- [VaMa97] T. Várady, R. R. Martin, J. Cox. *Reverse engineering of geometric models - an introduction*. Computer-Aided Design, Volume 29, Number 4. 1997.
- [VaRo97] T. Várady, A. Rockwood. *Geometric construction for setback vertex blending*. Computer-Aided Design, Volume 29, Number 6. 1997.

- [WaMe96] D. J. Walton, D. S. Meek. *A triangular G^1 patch from boundary curves*. Computer-Aided Design, Volume 28, Number 2. 1996.
- [Wagn01] M. Wagner. *Rekonstruktion von Oberflächen aus Punktwolken*. Studienarbeit an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 2001.
- [Wang96] Y. Wang. *Intersection of offsets of parametric surfaces*. Computer Aided Geometric Design, Volume 13. 1996.
- [WeRe99] V. Weiß, G. Renner, T. Várady. *Reconstruction of swept free-form features from measured data points*. Proc. of 32nd CIRP International Seminar on Manufacturing Systems. 1999.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Ich bin damit einverstanden, dass die Arbeit veröffentlicht wird und dass in wissenschaftlichen Veröffentlichungen auf sie Bezug genommen wird.

Der Universität Erlangen-Nürnberg, vertreten durch den Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung, wird ein (nicht ausschließliches) Nutzungsrecht an dieser Arbeit sowie an den im Zusammenhang mit ihr erstellten Programmen eingeräumt.

Erlangen, den 4. September 2002

(Marc Axel Johannes Wagner)