H. van Hees Wintersemester 2023/2024

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Lösungen zu Blatt 13

Aufgabe 1 (10 Punkte): Viererstromdichte

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass wir die homogenen Maxwell-Gleichungen mit Hilfe des antisymmetrischen Faraday-Tensors

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}^{\mathrm{T}}/c \\ -\vec{E}/c & -\epsilon^{ijk}B^k \end{pmatrix} \tag{1}$$

in kovarianter Form schreiben können

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu \quad \text{mit} \quad (j^\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dabei ist ρ die Ladungs- und $\vec{j}$ die Stromdichte, und weil die linke Seite ein Vektor ist, wenn wir die Felder so transformieren, dass $F^{\mu\nu}$ ein Tensorfeld 2. Stufe ist, muss folgtlich (j^μ) ein Vierervektor sein.

Wir haben andererseits in Theoretische Physik 2 gesehen, dass die Stromdichte für eine kontinuierliche Ladungsverteilung durch

$$\vec{j}(t,\vec{x}) \equiv \vec{j}(\underline{x}) = \rho(\underline{x})\vec{v}(\underline{x}) \tag{3}$$

ist, wobei $\vec{v}(\underline{x})$ das Strömungsfeld der geladenen Materie ist, also die Geschwindigkeit eines kleinen materiellen Volumens zur Zeit t am Ort $\vec{x}$ und $\rho = \mathrm{d}q/\mathrm{d}^3x$, also die Ladung im Volumenelement d^3x pro Volumeneinheit.

Wir wollen zeigen, dass diese physikalischen Bedeutung von ρ und $\vec{j}$ tatsächlich damit kompatibel ist, dass j^μ ein Vierervektor ist.

Dazu betrachten wir ein Inertialsystem Σ^* wo das Fluidvolumenelement am Raumzeit-Punkt $\underline{x}$ momentan in Ruhe ist. Offenbar gilt in diesem System

$$(j^{*\mu}) = \begin{pmatrix} c\rho^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Wir nehmen weiter an, dass die räumlichen Achsen des Systems Σ so orientiert sind, dass $\vec{v} = \beta c \vec{e}_1$ ist. In diesem Ruhsystem des Fluidelements ist die Vierergeschwindigkeit

$$u^{*\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow j^{*\mu} = \rho^* c u^{*\mu}. \tag{5}$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie dass der „inverse Lorentz-Boost“

$$\hat{\Lambda}(-\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

die korrekte Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \Lambda^\mu{}_\rho(-v) u^{*\rho} \tag{7}$$

ergibt.

Lösung: In Matrix-Vektor-Schreibweise lautet (7)

$$\underline{u} = \hat{\Lambda}(-v)\underline{u}^* = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\vec{\beta} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

und das ist die richtige Formel für die Vierergeschwindigkeit für ein Teilchen, das die Dreiergeschwindigkeit $\vec{v}$ besitzt.

(b) (3 Punkte) Argumentieren Sie, dass demnach

$$j^\mu = c\rho^* u^\mu \tag{9}$$

sein muss, wenn (j^μ) sich wie ein Vierervektor transformiert.

Lösung: Wenn (j^μ) sich als Vierervektor transformiert, gilt

$$\underline{j} = \hat{\Lambda}(-v)\underline{j}^* = \rho^* \hat{\Lambda}(-v)\underline{u}^* = \rho^* \underline{u}. \tag{10}$$

(c) (4 Punkte) Zeigen Sie weiter, dass das kompatibel mit der Formel

$$(j^\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \rho\vec{v} \end{pmatrix} \tag{11}$$

ist.

Anleitung: Dazu bemerken wir, dass die Ladung ein Lorentz-Skalar ist, und die im Fluidelement enthaltene Ladung demnach durch

$$\mathrm{d}q^* = \rho^* \mathrm{d}^3 x^* = \rho \mathrm{d}^3 x = \mathrm{d}q \tag{12}$$

gegeben ist. Dabei ist $\mathrm{d}^3 x^*$ das Volumen des Fluidelements, wie es ein Beobachter zum festen Zeitpunkt t^* im Ruhsystem Σ^* des Fluidelements misst, während $\mathrm{d}^3 x$ das Volumen dieses Fluidelements für einen Beobachter im System Σ zum entsprechenden festen Zeitpunkt t ist. Demnach ist das Volumenelment bzgl. Σ in der Boost-Richtung $\vec{e}_1$ Lorentz-kontrahiert gegenüber der entsprechenden Länge in Σ^*, während die dazu senkrechten Richtungen nicht kontrahiert sind, d.h. es gilt $\mathrm{d}^3 x = \mathrm{d}^2 x^*/\gamma$. Verwenden Sie nun (12), um die Ladungsdichte ρ^* bzgl. des Ruhsystems Σ^* des Fluidelements durch die Ladungsdichte ρ bzgl. des Laborsystems Σ auszudrücken. Verwenden Sie dann dieses Resultat in (9) und vergleichen das Ergebnis mit (11).

Lösung: Mit dem in der Anleitung gegebenen Argument mit der Lorentz-Kontraktion folgt aus (12)

$$\rho^* \mathrm{d}^3 x^* = \rho \mathrm{d}^3 x = \rho \frac{1}{\gamma} \mathrm{d}^3 x^* \;\Rightarrow\; \rho^* = \frac{\rho}{\gamma}. \tag{13}$$

Setzen wir dies in (10) ein, erhalten wir

$$\underline{j} = \rho^* c \underline{u} = \frac{\rho}{\gamma} c \underline{u} = \frac{\rho}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \rho \vec{v} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

und das stimmt in der Tat mit (11) überein, d.h. dass in der Tat $(j^\mu(\underline{x}))$ ein Vierervektorfeld ist, wie oben vorausgesetzt.