Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 12

Aufgabe 1 (10 Punkte): Gleichförmig bewegter Plattenkondensator

Im Inertialsystem Σ' ruhender Plattenkondensator mit Platten parallel zur x'^2-x'^3-Ebene im Abstand d mit Ladung Q besitzt bekanntlich ein elektrostatisches Feld $E'^1 = E' = Q/(\epsilon_0 A)$, wobei A die Fläche der (gegenüber d sehr großen Platten ist. Das elektrostatische Feld wird durch die Potentiale $\Phi' = -E' x^1, \vec{A}' = 0$ beschrieben, d.h. das Vierervektorpotential ist $(A'^\mu) = (\Phi'/c, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Die Spannung am Kondensator ist demnach $U' = E' d$.

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie das elektromagnetische Feld, wie es ein Beobachter im Inertialsystem Σ misst. Wie üblich bewege sich dabei Σ' (und damit der Kondensator) im System Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \beta c \vec{e}_1$.

Lösung: Wir verwenden die Transformationsformeln für das elektromagnetische Feld (Gl. (4.8.52) im Skript). Da hier $\vec{E}' = E' \vec{e}_1'$ ist, liegt nur ein elektrisches Feld in Boost-Richtung vor, d.h. es ändert sich gar nicht:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\|} = \vec{E}'_{\|} = E \vec{e}_1. \tag{1}$$

Ebenso ist $\vec{B}' = \vec{B} = 0$. Das Feld sieht also für einen in Σ ruhenden Beobachter genauso aus wie für einen in Σ' ruhenden Beobachter.

(b) (7 Punkte) Berechnen Sie das Viererpotential (A^μ) und zeigen Sie, dass sich daraus das gleiche elektromagnetische Feld wie in (a) ergibt.

Lösung: Das Viererpotential ist ein Vierervektorfeld, d.h. es transformiert sich gemäß

$$\underline{A}'(\underline{x}') = \hat{\Lambda} \underline{A}(x) \;\Rightarrow\; \underline{A}(x) = \hat{\Lambda}^{-1} \underline{A}'(\underline{x}'). \tag{2}$$

Dabei sind der Lorentz-Boost und sein Inverses durch

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

gegeben. Damit ist

$$\underline{A} = \hat{\Lambda}^{-1} \begin{pmatrix} \Phi'/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\gamma \Phi'}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E' \gamma x'^1}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Wir müssen noch x'^1 durch $\underline{x}$ ausdrücken. Es gilt

$$\underline{x}' = \hat{\Lambda} \underline{x} = \begin{pmatrix} \gamma(ct - \beta x^1) \\ \gamma(x^1 - vt) \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Also ist

$$\underline{A} = -\frac{E'\gamma^2(x^1 - vt)}{c}\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Nun ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t\vec{A} = -c\vec{\nabla}A^0 - \partial_t\vec{A} = \begin{pmatrix}E'\gamma^2 - E'\gamma^2\beta^2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E'\gamma^2(1-\beta^2)\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E'\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \vec{E}' \tag{7}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis in (a). Auch für das magnetische Feld folgt $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ das erwartete Resultat.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung

Eine Punktladung q bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \beta c\vec{e}_1$ im Inertialsystem Σ, d.h. sie ruht im räumlichen Ursprung im Inertialsystem Σ'. In Σ' wird es daher durch das Viererpotential $\underline{A}' = (\Phi'/c, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ mit

$$\Phi'(\vec{x}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}'|} \tag{8}$$

beschrieben. Wir wollen ohne Zuhilfenahme der Lorentz=Transformationsformeln das elektromagnetische Feld in Σ berechnen.

Dazu bemerken wir, dass in Σ' die Vierergeschwindigkeit des Teilchens $(u'^{\mu} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ ist.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$|\vec{x}'| = \sqrt{(\underline{u}' \cdot \underline{x}')^2 - \underline{x}' \cdot \underline{x}'} \tag{9}$$

und folglich

$$A'^{\mu} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c\sqrt{(\underline{u}' \cdot \underline{x}')^2 - \underline{x}' \cdot \underline{x}'}}u'^{\mu} \tag{10}$$

ist.

Lösung: Es ist

$$(\underline{u}' \cdot \underline{x}')^2 - \underline{x}' \cdot \underline{x}' = (x'^0)^2 - [(x'^0)^2 - \vec{x}'^2] = \vec{x}'^2 \tag{11}$$

und damit is (9) richtig. Da $\underline{u}' = (1, 0, 0, 0)$ ist, ist auch (10) korrekt.

(b) (2 Punkte) Wie lautet die Vierergeschwindigkeit $\underline{u}$ bzgl. Σ?

Lösung: Es ist

$$\underline{u} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underline{x} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{x} = \gamma\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{12}$$

(c) (2 Punkte) Wie lautet demnach das Viererpotential in Σ? **Hinweis:** Sie benötigen hier nicht die Lorentz-Transformation. Sie müssen nur beachten, dass (9) ein Lorentz-kovarianter Ausdruck ist.

Lösung: Da (9) manifest kovariant und die elektrische Ladung des Teilchens eine skalare Größe ist, gilt dieselbe Gleichung ohne die Striche, also

$$\underline{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c\sqrt{(\underline{u}\cdot\underline{x})^2 - \underline{x}\cdot\underline{x}}}\underline{u}. \tag{13}$$

Mit (12) folgt nach einigen einfachen Umformungen

$$\begin{aligned}(\underline{u}\cdot\underline{x})^2 - \underline{x}\cdot\underline{x} &= \gamma^2(ct-\beta x^1)^2 - (ct)^2 + \vec{x}^2\\ &= \gamma^2[c^2t^2 - 2vtx^1 + \beta^2(x^1)^2] - c^2t^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\\ &= (\gamma^2-1)c^2t^2 - 2\gamma^2 vtx^1 + (\gamma^2\beta^2+1)(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\\ &= \gamma^2(v^2t^2 - 2vtx^1 + (x^1)^2) + (x^2)^2 + (x^3)^2\\ &= \gamma^2(x^1-vt)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.\end{aligned} \tag{14}$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$\gamma^2 - 1 = \frac{1}{1-\beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \beta^2\gamma^2 \quad \text{und} \quad \gamma^2\beta^2 + 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1 = \frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2 \tag{15}$$

ist. **Bemerkung:** In diesem Falle fürt die Lorentz-Transformation der Raumzeitkoordinaten algebraisch schneller zum Ziel:

$$\underline{x}' = \hat{\Lambda}\underline{x} = \begin{pmatrix} \gamma(ct-\beta x^1) \\ \gamma(x^1 - vt) \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{x}'| = \sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}. \tag{16}$$

Jedenfalls ist damit

$$\begin{aligned}\Phi = cA^0 &= \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}},\\ \vec{A} &= \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0 c\sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}}\begin{pmatrix}\beta\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{\Phi}{c}\vec{\beta}.\end{aligned} \tag{17}$$

(d) (3 Punkte) Berechnen Sie aus dem Viererpotential das elektromagnetische Feld bzgl. des Inertialsystems Σ.

Lösung: Das elektrische Feld ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t\vec{A}. \tag{18}$$

Nun ist

$$\vec{\nabla}\Phi = -\frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}^3}\begin{pmatrix}\gamma^2(x^1-vt)\\x^2\\x^3\end{pmatrix} \tag{19}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_t\vec{A} &= -\frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0 c\sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}^3}\begin{pmatrix}-\beta v\gamma^2(x^1-vt)\\0\\0\end{pmatrix}\\ &= -\frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}^3}\begin{pmatrix}-\beta^2\gamma^2(x^1-vt)\\0\\0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{20}$$

Daraus folgt (wegen $(1-\beta^2)\gamma^2=1$)

$$\vec{E} = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}^3} \begin{pmatrix} x^1-vt \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times (\vec{\beta}\Phi) \\ &= -\frac{1}{c} \vec{\beta} \times \vec{\nabla}\Phi \\ &= \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0 c \sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}^3} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma^2(x^1-vt) \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{q\gamma\beta}{4\pi\epsilon_0 c \sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}^3} \begin{pmatrix} 0 \\ -x^3 \\ x^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22}$$

Hinweis: Die Lösung ist im Skript auf einem anderen Wege hergeleitet (vgl. Abschnitt 4.8.4).