Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 7

Aufgabe 1 (10 Punkte): Bahndrehimpulseigenzustände für $\ell = 1$

Wir betrachten das simultane Eigenwertproblem für die Operatoren $\vec{\mathrm{l}}^2$ und l_3, wobei $\vec{\mathrm{l}} = \vec{\mathrm{L}}/\hbar = -\mathrm{i}\vec{x} \times \vec{\nabla}$ der dimensionslose Bahndrehimpuls-Operator ist. Wir rechnen in Kugelkoordinaten. Die kartesischen Komponenten sind durch

$$\begin{aligned}
\hat{l}_1 &= \mathrm{i}(\sin\varphi \partial_\vartheta + \cot\vartheta \cos\varphi \partial_\varphi),\\
\hat{l}_2 &= \mathrm{i}(-\cos\varphi \partial_\vartheta + \cot\vartheta \sin\varphi \partial_\varphi),\\
\hat{l}_3 &= -\mathrm{i}\partial_\varphi
\end{aligned} \tag{1}$$

gegeben.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die „Leiteroperatoren" durch

$$\begin{aligned}
\hat{l}_+ &= \hat{l}_1 + \mathrm{i}\hat{l}_2 = \exp(\mathrm{i}\varphi)(\partial_\vartheta + \mathrm{i}\cot\vartheta\,\partial_\varphi),\\
\hat{l}_- &= \hat{l}_1 - \mathrm{i}\hat{l}_2 = \exp(-\mathrm{i}\varphi)(-\partial_\vartheta + \mathrm{i}\cot\vartheta\,\partial_\varphi)
\end{aligned} \tag{2}$$

gegeben sind. Dabei ist $\cot\vartheta = \cos\vartheta/\sin\vartheta$.

Lösung: Mit $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \exp(\mathrm{i}\varphi)$ folgt die Behauptung sofort mit (1):

$$\hat{l}_+ = [(\mathrm{i}\sin\varphi + \cos\varphi)\partial_\vartheta + \mathrm{i}\cot\vartheta(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\partial_\varphi] = \exp(\mathrm{i}\varphi)(\partial_\vartheta + \mathrm{i}\cot\vartheta\,\partial_\varphi). \tag{3}$$

Die Rechnung für $\hat{l}_-$ folgt analog mit $\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi = \exp(-\mathrm{i}\varphi)$.

(b) (2 Punkte) Für die folgende Rechnung ist es bequemer, statt ϑ die neue Variable $u = \cos\vartheta$ zu verwenden. Dies ist eine umkehrbar eindeutige Variablentransformation, da für die Kugelkoordinaten $\vartheta \in [0, \pi]$ ist und $\cos\vartheta$ auf diesem Intervall monoton fallend ist. Es gilt in diesem Intervall auch $\sin\vartheta \geq 0$ und damit $\sin\vartheta = +\sqrt{1-u^2}$. Zeigen Sie, dass mit dieser neuen Variable die Leiteroperatoren durch

$$\begin{aligned}
\hat{l}_+ &= \exp(\mathrm{i}\varphi)\left(-\sqrt{1-u^2}\partial_u + \mathrm{i}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\partial_\varphi\right),\\
\hat{l}_- &= \exp(-\mathrm{i}\varphi)\left(+\sqrt{1-u^2}\partial_u + \mathrm{i}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\partial_\varphi\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

gegeben sind.

Lösung: Wir müssen nur die Ableitungen nach ϑ durch Ableitungen nach u ausdrücken. Mit der Kettenregel folgt $\partial_\vartheta \psi = \mathrm{d}u/\mathrm{d}\vartheta\, \partial_u \psi = -\sin\vartheta\, \partial_u \psi = -\sqrt{1-u^2}\partial_u \psi$. Weiter ist $\cot\vartheta = \cos\vartheta/\sin\vartheta = u/\sqrt{1-u^2}$ Damit folgt sofort die Behauptung aus (2).

(c) (3 Punkte) Wir suchen nun die simultanen Eigenvektoren von $\vec{\mathrm{l}}^2$ zum Eigenwert $\ell(\ell+1) = 2$, also $\ell = 1$, und l_3 zu den Eigenwerten $m \in \{-1, 0, 1\}$. Die Eigenfunktionen besitzten die Form

$$u_{\ell,m}(u, \varphi) = U_{\ell,m}(u)\exp(\mathrm{i}m\varphi). \tag{5}$$

Zeigen Sie zuerst, dass $\hat{l}_3 u_{\ell m} = m u_{\ell m}$ ist und bestimmen Sie dann $u_{\ell,-1}$ aus der Bedingung $\hat{l}_- u_{1,-1} = 0$ (s. Skript). Die Normierung ergibt sich daraus, dass das Skalarprodukt für Wellenfunktionen $\psi(\vartheta,\varphi) \equiv \psi(u,\varphi)$, die auf der Einheitskugel definiert sind, durch

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_\Omega = \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin\vartheta\, \psi_1^*(\vartheta,\varphi)\psi_2(\vartheta,\varphi) = \int_{-1}^1 \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \psi_1^*(u,\varphi)\psi_2(u,\varphi) \qquad (6)$$

gegeben ist, d.h. wir normieren $u_{\ell,-1}$ so, dass

$$\left\langle u_{1,-1} \middle| u_{1,-1} \right\rangle = \int_{-1}^1 \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi |u_{1,-1}(u,\varphi)|^2 = 1 \qquad (7)$$

ist.

Hinweis: Das Resultat lautet

$$u_{1,-1}(u,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{1-u^2}\exp(-\mathrm{i}\varphi) \equiv \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \exp(-\mathrm{i}\varphi). \qquad (8)$$

Lösung: Wegen (1) folgt

$$\hat{l}_3 u_{\ell,m}(u,\varphi) = -\mathrm{i}\partial_\varphi[U_{\ell,m}(u)\exp(\mathrm{i}m\varphi)] = m U_{\ell,m}(u)\exp(\mathrm{i}m\varphi) = m u_{\ell,m}(u,\varphi), \qquad (9)$$

d.h. $u_{\ell,m}$ ist Eigenfunktion von $\hat{l}_3$ zum Eigenwert m.
Mit (4) und $u_{1,-1} = U_{1,-1}(u)\exp(-\mathrm{i}\varphi)$ folgt

$$\hat{l}_- u_{1,-1} = \exp(-2\mathrm{i}\varphi)\left[\sqrt{1-u^2}U'_{1,-1}(u) + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}U_{1,-1}(u)\right] \stackrel{!}{=} 0. \qquad (10)$$

Daraus folgt die Differentialgleichung

$$(1-u^2)U'_{1,-1}(u) = -u\, U_{1,-1}(u). \qquad (11)$$

Diese können wir einfach lösen, indem wir sie in der Form

$$\frac{U'_{1,-1}}{U_{1,-1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln U_{1,-1} = -\frac{u}{1-u^2} \qquad (12)$$

schreiben. Durch Integration ergibt sich

$$\ln(U_{1,-1}/N) = -\int \mathrm{d}u \frac{u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln(1-u^2) \Rightarrow U_{1,-1}(u) = N\sqrt{1-u^2}. \qquad (13)$$

Die Normierung folgt aus dem angegebenen Normierungsintegral. Da $|\exp(-\mathrm{i}\varphi)| = 1$ ist, ergibt sich

$$\left\langle u_{1,-1} \middle| u_{1,-1} \right\rangle_\Omega = \int_{-1}^1 \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi |N|^2(1-u^2) = 2\pi \cdot 2\int_0^1 \mathrm{d}u |N|^2(1-u^2) = \frac{8\pi}{3}|N|^2 \stackrel{!}{=} 1. \qquad (14)$$

Die Normierungskonstante ist wie immer nur bis auf einen unbestimmten (und für die Physik unerhebliche!) Phasenfaktor bestimmt. In der Literatur ist die Phasenwahl von Condon und Shortley am verbreitetsten, und wir folgen dieser Konvention, die besagt, dass die Eigenfunktionen zum minimalen Eigenwert $(-\ell)$ für $\hat{l}_3$, also $u_{\ell,-\ell}$, als positiv reelle Funktionen gewählt werden. Demnach ist $N = \sqrt{3/(8\pi)}$, und es ergibt sich tatsächlich (8).

(d) (3 Punkte) Verwenden Sie nun die Formel

$$\hat{l}_+ u_{1,m} = \sqrt{(m+2)(1-m)}\, u_{1,m+1} \tag{15}$$

um aus (8) zuerst $u_{1,0}$ und dann $u_{1,1}$ zu berechnen. Zeigen Sie, dass $\hat{l}_+ u_{1,1} = 0$ ist, wie es sein muss.
Hinweis: Die Ergebnisse für die gesuchten Eigenfunktionen zur Drehimpulsquantenzahl 1 sind die entsprechenden Kugelflächenfunktionen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_{1,-1}(\vartheta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \exp(\mathrm{i}\varphi), \\ \mathrm{Y}_{1,0}(\vartheta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \\ \mathrm{Y}_{1,1}(\vartheta,\varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \exp(-\mathrm{i}\varphi). \end{aligned} \tag{16}$$

Lösung: Wir wenden $\hat{l}_+$ auf $u_{1,-1}$ an, also (15) mit $m = -1$:

$$\begin{aligned} \hat{l}_+ u_{1,-1} = \sqrt{2} u_{1,0} &= \exp(\mathrm{i}\varphi)\left[-\sqrt{1-u^2}\partial_u + \mathrm{i}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\partial_\varphi\right]\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{1-u^2}\exp(-\mathrm{i}\varphi) \\ &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left[-\sqrt{1-u^2}\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} + u\right] = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} u \\ \Rightarrow\ u_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} u. \end{aligned} \tag{17}$$

Darauf nochmals (15) angewandt liefert

$$\begin{aligned} &\hat{l}_+ u_{1,0} = \sqrt{2} u_{1,1} = \exp(\mathrm{i}\varphi)\left(-\sqrt{1-u^2}\partial_u\right)\sqrt{\frac{3}{4\pi}} u = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sqrt{1-u^2}\exp(\mathrm{i}\varphi) \\ &\Rightarrow u_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{1-u^2}\exp(\mathrm{i}\varphi). \end{aligned} \tag{18}$$

Schließlich wenden wir darauf nochmals $\hat{l}_+$ an. Da $u_{1,1}$ die Eigenfunktion von $\hat{l}_3$ zum größt möglichen Eigenwert $m_{\text{max}} = \ell = 1$ ist, muss dabei 0 herauskommen. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \hat{l}_+ u_{1,1} &= \exp(\mathrm{i}\varphi)\left[-\sqrt{1-u^2}\partial_u - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right]\left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{1-u^2}\exp(\mathrm{i}\varphi)\right] \\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\exp(2\mathrm{i}\varphi)\left[\sqrt{1-u^2}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} - u\right] = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Freiwillige Knobelaufgabe (5 Zusatzpunkte)

Warum gibt es keine *Bahndrehimpulseigenfunktionen* zum Eigenwert $\ell = 1/2$? Gehen Sie genau analog wie in der obigen Aufgabe vor und zeigen Sie, dass die Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell = 1/2$ zu einem Widerspruch führt. Im Skript wird auf andere Weise allgemein gezeigt, dass es keine halbzahligen Bahndrehimpulsquantenzahlen gibt.

Bemerkung: Freilich kommen in der Natur Drehimpulse mit halbzahligen Drehimpulsquantenzahlen vor. Dies ist aber kein (reiner) Bahndrehimpuls sondern geht auf einen nur in der Quantenmechanik vorkommenden Drehimpuls, der in der klassischen Mechanik unbekannt ist, zurück, den sog. **Spin**. Der Spin ist eine Art intrinsischer Drehimpuls von Elementarteilchen. Z.B. besitzt das Elektron den Spin $s = 1/2$ (d.h. die Spindrehimpulsquantenzahl ist $s = 1/2$ und es gibt zwei Eigenwerte von $\hat{s}_3$, $m_s \in \{-1/2, 1/2\}$. Der Operator $\hat{\vec{s}}^2$ besitzt entsprechend den Eigenwert $s(s+1) = 3/4$. Der Spin wird in der Vorlesung später noch auführlich behandelt.

Lösung: Wir beginnen ganz analog wie in der vorigen Aufgabe und nehmen an, es gäbe Drehimpulseigenvektoren $u_{1/2,m}$ mit $m \in \{-1/2, 1/2\}$, wie man aus der allgemeinen Betrachtung zum Drehimpulseigenwertproblem erwarten könnte.

Es muss dann gelten $u_{1/2,-1/2} = U_{1/2,-1/2}(u)\exp(-\mathrm{i}\varphi/2)$.

$$\hat{l}\_u_{1/2,-1/2} = \exp(-3\mathrm{i}\varphi/2)\left[\sqrt{1-u^2}U'_{1/2,-1/2}(u) + \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}U_{1/2,-1/2}(u)\right] \stackrel{!}{=} 0. \tag{20}$$

Damit folgt die DGL

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln U_{1/2,-1/2} = -\frac{1}{2}\frac{u}{1-u^2} \Rightarrow \ln(U_{1/2,-1/2}/N) = \frac{1}{4}\ln(1-u^2) \Rightarrow U_{1/2.-1/2}(u) = N(1-u^2)^{1/4}. \tag{21}$$

Das Normierungsintegral existiert ebenfalls. Wir müssen es aber für die folgende Überlegung nicht berechnen. Jedenfalls gilt

$$u_{1/2,-1/2}(u,\varphi) = N(1-u^2)^{1/4}\exp(-\mathrm{i}\varphi/2). \tag{22}$$

Jetzt berechnen wir $u_{1/2,1/2}$ mit Hilfe von (15):

$$\begin{aligned}\hat{l}_+u_{1/2,-1/2} = u_{1/2,1/2} &= N\exp(\mathrm{i}\varphi)\left[-\sqrt{1-u^2}\partial_u + \mathrm{i}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\partial_\varphi\right](1-u^2)^{1/4}\exp(-\mathrm{i}\varphi/2)\\ &= N\exp(\mathrm{i}\varphi/2)\left[-\sqrt{1-u^2}(-2u)\frac{1}{4}(1-u^2)^{-3/4} + \frac{1}{2}u(1-u^2)^{-1/4}\right]\\ &= N\exp(\mathrm{i}\varphi/2)\left[-\frac{13}{6}u(1-u^2)^{-1/4}\right] = Nu(1-u^2)^{-1/4}\exp(\mathrm{i}\varphi/2)\end{aligned} \tag{23}$$

Nun prüfen wir nach, ob dies tatsächlich der Eigenvektor von $\hat{l}_3$ zum maximal möglichen Eigenwert $m = 1/2$ ist. Dazu müsste $\hat{l}_+u_{1/2,1/2} = 0$ sein. Es ist aber

$$\begin{aligned}\hat{l}_+u_{1/2,1/2} &= N\exp(\mathrm{i}\varphi)\left[-\sqrt{1-u^2}\partial_u + \mathrm{i}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\partial_\varphi\right]u(1-u^2)^{-1/4}\exp(\mathrm{i}\varphi/2)\\ &= -N\exp(3\mathrm{i}\varphi/2)(1-u^2)^{-3/4} \neq 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Die Annahme der Existenz eines Bahndrehimpulseigenzustandes mit $\ell = 1/2$ führt also zu einem Widerspruch zur Drehimpulsalgebra, d.h. es kann für einen Bahndrehimpuls nicht $\ell = 1/2$ sein.

Lösung: Wir beginnen ganz analog wie in der vorigen Aufgabe und nehmen an, es gäbe Drehimpulseigenvektoren $u_{1/2,m}$ mit $m \in \{-1/2, 1/2\}$, wie man aus der allgemeinen Betrachtung zum Drehimpulseigenwertproblem erwarten könnte.

Es muss dann gelten $u_{1/2,-1/2} = U_{1/2,-1/2}(u)\exp(-\mathrm{i}\varphi/2)$.

$$\hat{l}\_u_{1/2,-1/2} = \exp(-3\mathrm{i}\varphi/2)\left[\sqrt{1-u^2}U'_{1/2,-1/2}(u) + \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}U_{1/2,-1/2}(u)\right] \stackrel{!}{=} 0. \tag{25}$$

Damit folgt die DGL

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln U_{1/2,-1/2} = -\frac{1}{2} \frac{u}{1-u^2} \Rightarrow \ln(U_{1/2,-1/2}/N) = \frac{1}{4} \ln(1-u^2) \Rightarrow U_{1/2.-1/2}(u) = N(1-u^2)^{1/4}. \tag{26}$$

Das Normierungsintegral existiert ebenfalls. Wir müssen es aber für die folgende Überlegung nicht berechnen. Jedenfalls gilt

$$u_{1/2,-1/2}(u,\varphi) = N(1-u^2)^{1/4} \exp(-\mathrm{i}\varphi/2). \tag{27}$$

Jetzt berechnen wir $u_{1/2,1/2}$ mit Hilfe von (15):

$$\begin{aligned} \hat{l}_+ u_{1/2,-1/2} = u_{1/2,1/2} &= N \exp(\mathrm{i}\varphi) \left[-\sqrt{1-u^2}\partial_u + \mathrm{i}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \partial_\varphi \right] (1-u^2)^{1/4} \exp(-\mathrm{i}\varphi/2) \\ &= N \exp(\mathrm{i}\varphi/2) \left[-\sqrt{1-u^2}(-2u)\frac{1}{4}(1-u^2)^{-3/4} + \frac{1}{2} u (1-u^2)^{-1/4} \right] \\ &= N \exp(\mathrm{i}\varphi/2) \left[-\frac{13}{6} u (1-u^2)^{-1/4} \right] = N u (1-u^2)^{-1/4} \exp(\mathrm{i}\varphi/2) \end{aligned} \tag{28}$$

Nun prüfen wir nach, ob dies tatsächlich der Eigenvektor von $\hat{l}_3$ zum maximal möglichen Eigenwert $m = 1/2$ ist. Dazu müsste $\hat{l}_+ u_{1/2,1/2} = 0$ sein. Es ist aber

$$\begin{aligned} \psi = \hat{l}_+ u_{1/2,1/2} &= N \exp(\mathrm{i}\varphi) \left[-\sqrt{1-u^2}\partial_u + \mathrm{i}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \partial_\varphi \right] u (1-u^2)^{-1/4} \exp(\mathrm{i}\varphi/2) \\ &= -N \exp(3\mathrm{i}\varphi/2)(1-u^2)^{-3/4} \neq 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Die Annahme der Existenz eines Bahndrehimpulseigenzustandes mit $\ell = 1/2$ führt also zu einem Widerspruch zur Drehimpulsalgebra, d.h. es kann für einen Bahndrehimpuls nicht $\ell = 1/2$ sein.

Die Funktion (29) ist auch nicht im Sinne des Skalarprodukts für Punktionen auf der Einheitssphäre Ω quadratintegrabel, denn

$$\langle \psi \,|\, \psi \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} |\psi(u,\varphi)|^2 = 2\pi |N|^2 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u (1-u^2)^{-3/2} = 2\pi |N|^2 \left. \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right|_{u=-1}^{1} \to \infty. \tag{30}$$

Die fortgesetzte Anwendung von $\hat{l}_+$ auf $u_{1/2,-1/2}$ führt also aus dem Hilbertraum der auf Ω quadratintegrablen Eigenfunktionen hinaus.

Wie man durch direktes Nachrechnen zeigt, lösen zwar die oben berechneten Eigenfunktionen $u_{1/2,\pm 1/2}$ das simultane Eigenwertproblem für $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{\vec{L}}_3$ mit den zu erwartenden Eigenwerten $3\hbar^2/4$ und $\pm\hbar/2$. Allerdings ist

$$\hat{l}_1 u_{1/2,1/2} = \frac{1}{2}(\hat{l}_+ + \hat{l}_-) u_{1/2,1/2} = \frac{N}{2} \left[\exp(-\mathrm{i}\varphi/2)(1-u^2)^{1/4} - \frac{\exp(3\mathrm{i}\varphi/2)}{(1-u^2)^{3/4}} \right]. \tag{31}$$

Dies ist keine auf dem Definitionsbereich $u \in [-1,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ quadratintegrierbare Funktion, d.h. $\hat{l}_1$ ist für die Funktion $u_{1/2,1/2}$ nicht wirklich selbstadjungiert, so dass die vermeintlichen Eigenlösungen zu $\ell = 1/2$ keine wirklichen Eigenfunktionen für die Drehimpulsoperatoren sind.

Die Drehimpulseigenfunktionen zu $j = 1/2$ sind also nicht durch Bahndrehimpulsoperatoren realisierbar aber als Spin, d.h. einem spezifische quantenmechnischen Drehimpuls. Ein wichtiges Beispiel für ein Teilchen, das Spin 1/2 besitzt, ist das Elektron. Damit werden wir uns später noch ausführlich beschäftigen.
