Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld

Ein harmonisch gebundenes Teilchen (Oszillatorkreisfrequenz ω) befinde sich in einem konstanten elektrischen Feld, d.h. das Potential ist

$$V(\mathbf{x}) = \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}^2 - qE\mathbf{x}, \tag{1}$$

wobei m die Masse des Teilchens und q seine Ladung ist. Wir wollen die Energieeigenwerte bestimmen. Dazu müssen wir (fast) nichts rechnen, wenn wir bedenken, dass in der klassischen Mechanik ein ganz gewöhnlicher harmonischer Oszillator vorliegt, wobei aber die Ruhelage um ein $x_0 = \text{const}$ verschoben ist. Gehen Sie also wie folgt vor:

(a) Es sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + x_0\mathbb{1}$. Bestimmen Sie x_0 so, dass

$$V(\mathbf{x}) = \tilde{V}(\mathbf{x}') = \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}'^2 + \epsilon\mathbb{1} \tag{2}$$

mit $\epsilon = \text{const}$ wird.

Lösung: Da hier nur der eine Operator $\mathbf{x}$ und der Einheitsoperator $\mathbb{1}$ vorkommen, können wir das Potential umformen, als ob es sich um gewöhnliche Zahlen handelt, denn trivialerweise kommutiert $\mathbf{x}$ mit sich selbst und mit dem Einheitsoperator. Damit folgt

$$V(\mathbf{x}) = \tilde{V}(\mathbf{x}') = \frac{m\omega^2}{2}(\mathbf{x}'^2 + 2x_0\mathbf{x}' + x_0^2\mathbb{1}) - qE(\mathbf{x}' + x_0\mathbb{1}). \tag{3}$$

Sortieren wir dies nach Potenzen von $\mathbf{x}'$, ergibt sich

$$\tilde{V}(\mathbf{x}') = \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}'^2 + (m\omega^2 x_0 - qE)\mathbf{x}' + \left(\frac{m\omega^2}{2}x_0^2 - qEx_0\right)\mathbb{1}. \tag{4}$$

Damit der mittlere Term verschwindet, müssen wir offenbar x_0 nur so wählen, dass

$$m\omega^2 x_0 - qE = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{qE}{m\omega^2} \tag{5}$$

wird. Dann wird

$$\epsilon = \frac{m\omega^2}{2}x_0^2 - qEx_0 = \frac{m\omega^2}{2}\frac{(qE)^2}{(m\omega^2)^2} - \frac{(qE)^2}{m\omega^2} = -\frac{(qE)^2}{2m\omega^2} = -\frac{m\omega^2}{2}x_0^2. \tag{6}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Lösungen für die Energieeigenzustände dieselben Wellenfunktionen wie für den gewöhnlichen harmonischen Oszillator (nur eben mit $x' = x - x_0$ als Ortskoordinate) ergeben und die dazugehörigen Energieeigenwerte nur um den konstanten Beitrag ϵ verschoben sind.

Lösung: Offenbar können wir den Hamilton-Operator durch die neue Ortskoordinate $\mathbf{x}'$ ausdrücken als

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m}{2\omega^2}\mathbf{x}'^2 + \epsilon\mathbb{1}. = \tilde{\mathbf{H}} + \epsilon\mathbb{1}. \tag{7}$$

Offenbar ist $\tilde{\mathbf{H}}$ der Hamiltonoperator eines ganz gewöhnlichen harmonischen Oszillators, und besitzt damit die in der Vorlesung konstruierten Eigenfunktionen u_n mit $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und den Eigenwerten $\tilde{E}_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. Dann ist klar, dass dieselben Funktionen auch Eigenfunktionen von $\mathbf{H}$ sind, denn es gilt

$$\mathbf{H} u_n(x') = (\tilde{\mathbf{H}} + \epsilon \mathbf{1}) u_n(x') = \left[\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \epsilon\right] u_n(x'), \tag{8}$$

d.h. die u_n sind Eigenfunktionen von $\mathbf{H}$ zu den Eigenwerten

$$E_n = \tilde{E}_n + \epsilon = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \epsilon. \tag{9}$$

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Gleichung

$$u_{n+1}(x') = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \mathbf{a}^\dagger u_n(x'), \tag{10}$$

die Energieeigenfunktionen. Setzt man den Erzeugungsoperator aus dem Skript (Abschnitt 3.5) ein, erhält man die explizite Formel

$$u_{n+1}(x') = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \left(\frac{x'}{a} - a \mathrm{d}_x\right) u_n(x'). \tag{11}$$

Die Iteration beginnt mit

$$u_0(x) = N_0 \exp\left(-\frac{x'^2}{2a^2}\right) \quad \text{mit} \qquad N_0 = \left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{1/4}. \tag{12}$$

Berechnen Sie die Energieeigenfunktionen u_n für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dabei ist $a = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ (vgl. Skript Abschnitt 3.9). Dabei ist definitionsgemäß weiter

$$u_n(x') = \frac{N_0}{\sqrt{2^n n!}} \mathrm{H}_n\left(\frac{x'}{a}\right) \exp\left(-\frac{x'^2}{2a^2}\right), \tag{13}$$

wobei H_n die Hermite-Polynome sind. Geben Sie aufgrund Ihrer Rechnung auch die Hermite-Polynome für $n \in \{1, 2, 3\}$ an. Es gilt $\mathrm{H}_0(x/a) = 1$.

Lösung: Im Folgenden setzen wir $\xi = x'/a$ und $u_n(x') = \tilde{u}_n(\xi)$, d.h. $u_n(x) = \tilde{u}_n(x/a)$. Es ist

$$\tilde{u}_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \mathrm{d}_\xi)\tilde{u}_0(\xi) = \frac{N_0}{\sqrt{2}}(\xi - \mathrm{d}_\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \quad \text{mit} \quad N_0 = \left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{1/4}, \tag{14}$$

d.h.

$$\tilde{u}_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} N_0 (2\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{H}_1(\xi) = 2\xi, \tag{15}$$

wobei die H_n die Hermite-Polynome bezeichnen (s. Skript Abschnitt 3.9).

Wendet man nochmals die Iterationsformel an, folgt

$$\tilde{u}_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^2}}\left(\xi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)\tilde{u}_1(\xi) = N_0 \frac{1}{\sqrt{2^2 \cdot 2!}}(4\xi^2 - 2) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{H}_2 = 4\xi^2 - 2 \tag{16}$$

und schließlich

$$\tilde{u}_3(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{\mathrm{d}} x \right) \tilde{u}_2(\xi) = N_0 \frac{1}{\sqrt{2^3 3!}} (8\xi^3 - 12\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} \right) \Rightarrow \mathrm{H}_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi. \tag{17}$$

Bemerkung: Es ist natürlich bequemer, die Iterationsformel für die Hermite-Polynome (3.9.3) aus dem Skript

$$\mathrm{H}_{n+1}(\xi) = 2\xi \mathrm{H}_n(\xi) - \mathrm{H}'_n(\xi) \tag{18}$$

beginnend mit $\mathrm{H}_0(\xi) = 1$ zu verwenden. Dann erhält man in Übereinstimmung mit unseren obigen Rechnungen

$$\mathrm{H}_1(\xi) = 2\xi, \quad \mathrm{H}_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad \mathrm{H}_3(\xi) = 8\xi^3 - 4\xi - 8\xi = 8\xi^3 - 12\xi. \tag{19}$$