H. van Hees **Wintersemester 2023/2024**

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 1 (10 Punkte): Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und Dreiecksungleichung

Das Skalarprodukt für zwei Wellenfunktionen ψ und ϕ ist durch

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \tag{1}$$

definiert und die Norm der Wellenfunktion ψ durch

$$||\psi|| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}. \tag{2}$$

Es ist zu beachten, dass es sich beim Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$ um einen komplexen Vektorraum handelt und daher im Skalarprodukt das linke Argument konjugiert komplex eingeht.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das für beliebige Wellenfunktionen ψ, ϕ_1 und ϕ_2 und beliebige Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle \psi | \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \psi | \phi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \psi | \phi_2 \rangle \tag{3}$$

und für beliebige Wellenfunktionen ψ und ϕ

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^* \tag{4}$$

sowie für Wellenfunktionen ψ_1, ψ_2 und ϕ und beliebige Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 | \phi \rangle = \lambda_1^* \langle \psi_1 | \phi \rangle + \lambda_2^* \langle \psi_2 | \phi \rangle \tag{5}$$

gilt.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} \langle \psi | \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \psi^*(\vec{x}) [\lambda_1 \phi_1(\vec{x}) + \lambda_2 \phi_2(\vec{x})] \\ &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \psi^*(\vec{x}) \phi_1(\vec{x}) + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \psi^*(\vec{x}) \phi_2(\vec{x}) \\ &= \lambda_1 \langle \psi | \phi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \psi | \phi_2 \rangle . \end{aligned} \tag{6}$$

Weiter gilt

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) = \left[\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \phi^*(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \right]^* = \langle \phi | \psi \rangle^* . \tag{7}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 | \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x [\lambda_1 \psi_1(\vec{x}) + \lambda_2 \psi_2(\vec{x})]^* \phi(\vec{x}) \\ &= \lambda_1^* \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \psi_1^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) + \lambda_2^* \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \psi_2^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \\ &= \lambda_1^* \langle \psi_1 | \phi \rangle + \lambda_2^* \langle \psi_2 | \phi \rangle . \end{aligned} \tag{8}$$

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für beliebige Wellenfunktionen ψ und ϕ stets die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle\psi|\phi\rangle| \leq ||\psi||\,||\phi|| \tag{9}$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die positive Definitheit des Skalarprodukts für die Wellenfunktion $\psi - \lambda\phi$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle\psi - \lambda\phi\,|\,\psi - \lambda\phi\rangle \geq 0, \tag{10}$$

indem sie zunächst das Skalarprodukt ausmultiplizieren und dann

$$\lambda = \frac{\langle\phi\,|\,\psi\rangle}{||\phi||^2} \tag{11}$$

setzen.

Lösung: Ausmultiplizieren von (10) ergibt

$$||\psi||^2 - \lambda^* \langle\phi\,|\,\psi\rangle - \lambda\langle\psi\,|\,\phi\rangle + |\lambda|^2||\phi||^2 \geq 0. \tag{12}$$

Wählen wir nun λ gemäß (11), folgt

$$||\psi||^2 - 2\frac{|\langle\phi\,|\,\psi\rangle|^2}{||\phi||^2} + \frac{|\langle\phi\,|\,\psi\rangle|^2}{||\phi||^2} = ||\psi||^2 - \frac{|\langle\phi\,|\,\psi\rangle|^2}{||\phi||^2} \geq 0 \tag{13}$$

bzw.

$$||\psi||^2||\phi||^2 \geq |\langle\psi\,|\,\phi\rangle|^2 \;\Rightarrow ||\psi||\,||\phi|| \geq |\langle\psi\,|\,\phi\rangle|. \tag{14}$$

(c) (3 Punkte) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$||\psi + \phi|| \leq ||\psi|| + ||\phi||. \tag{15}$$

Hinweis: Argumentieren Sie zuerst, dass immer

$$\langle\psi\,|\,\phi\rangle + \langle\phi\,|\,\psi\rangle \leq 2|\langle\psi\,|\,\phi\rangle| \tag{16}$$

sein muss. Multiplizieren Sie nun

$$||\psi + \phi||^2 = \langle\psi + \phi\,|\,\psi + \phi\rangle \tag{17}$$

aus und verwenden dann (16) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (1), um zu beweisen, dass

$$||\psi + \phi||^2 \leq (||\psi|| + ||\phi||)^2 \tag{18}$$

ist, was äquivalent zur Dreieicksungleichung (15) ist.

Lösung: Wir zeigen zuerst (16). Es ist in der Tat

$$\langle\psi\,|\,\phi\rangle + \langle\phi\,|\,\psi\rangle = \langle\psi\,|\,\phi\rangle + \langle\psi\,|\,\phi\rangle^* = 2\,\mathrm{Re}\,\langle\psi\,|\,\phi\rangle \leq 2|\langle\psi\,|\,\phi\rangle|. \tag{19}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|$ und also $\mathrm{Re}\,z \leq |\mathrm{Re}\,z| \leq |z|$ ist.

Multiplizieren wir nun (17) aus, erhalten wir mit (17)

$$||\psi + \phi||^2 = \langle\psi + \phi\,|\,\psi + \phi\rangle = ||\psi||^2 + \langle\psi\,|\,\phi\rangle + \langle\phi\,|\,\psi\rangle + ||\psi||^2 \leq ||\psi||^2 + 2|\langle\psi\,|\,\phi\rangle| + ||\phi|^2. \tag{20}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (9) folgt dann

$$||\psi + \phi||^2 \leq ||\psi||^2 + \langle\psi\,|\,\phi\rangle + \langle\phi\,|\,\psi\rangle + ||\psi||^2 \leq ||\psi||^2 + 2||\psi||\,||\phi|| + ||\phi|^2 = (||\psi|| + ||\phi||)^2 \tag{21}$$

und damit die Dreiecksungleichung (15).

Aufgabe 2: Operatorgymnastik

Im Folgenden seien $\hat{A}$, $\hat{B}$, ... irgendwelche (nicht notwendig selbstadjungierte Operatoren. Die Definition des zu $\hat{A}$ adjungierten Operators $\hat{A}^\dagger$ ist, dass für alle Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ stets

$$\left\langle \psi \middle| \hat{A} \middle| \phi \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger \psi \middle| \phi \right\rangle \tag{22}$$

gilt.

Weiterhin ist für zwei Operatoren der Kommutator durch

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{23}$$

definiert. Zeigen Sie folgende Identitäten

(a) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

Lösung: Aus der Definition für den adjungierten Operator folgt

$$\left\langle \psi \middle| \hat{A}\hat{B} \middle| \phi \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger \psi \middle| \hat{B} \middle| \phi \right\rangle = \left\langle \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger \psi \middle| \phi \right\rangle = \left\langle (\hat{A}\hat{B})^\dagger \middle| \phi \right\rangle. \tag{24}$$

Da dies für alle Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ gilt, folgt in der Tat die Behauptung.

(b) $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^\dagger = -\left[\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger\right]$.

Lösung: $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^\dagger = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^\dagger = (\hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger \hat{B}^\dagger = -\left[\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger\right]$.

(c) $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C}$.

Lösung:

$$\hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} = \hat{B}(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}) + (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) - (\hat{B}\hat{C})\hat{A} = \left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right]. \tag{25}$$

(d) $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}$.

Lösung:

$$\hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B} = (\hat{A}\hat{B})\hat{C} - \hat{C}(\hat{A}\hat{B}) = \left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right]. \tag{26}$$