H. van Hees **Wintersemester 2023/2024**

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 5

Aufgabe 1 (10 Punkte): Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld

Ein harmonisch gebundenes Teilchen (Oszillatorkreisfrequenz ω) befinde sich in einem konstanten elektrischen Feld, d.h. das Potential ist

$$V(\mathbf{x}) = \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}^2 - qE\mathbf{x}, \tag{1}$$

wobei m die Masse des Teilchens und q seine Ladung ist. Wir wollen die Energieeigenwerte bestimmen.

Dazu müssen wir (fast) nichts rechnen, wenn wir bedenken, dass in der klassischen Mechanik ein ganz gewöhnlicher harmonischer Oszillator vorliegt, wobei aber die Ruhelage um ein $x_0 = \text{const}$ verschoben ist. Gehen Sie also wie folgt vor:

(a) (3 Punkte) Es sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + x_0 \mathbb{1}$. Bestimmen Sie x_0 so, dass

$$V(\mathbf{x}) = \tilde{V}(\mathbf{x}') = \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}'^2 + \epsilon \mathbb{1} \tag{2}$$

mit $\epsilon = \text{const}$ wird.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass nun die Lösungen für die Energieeigenzustände dieselben Wellenfunktionen wie für den gewöhnlichen harmonischen Oszillator (nur eben mit $x' = x - x_0$ als Ortskoordinate) ergeben und die dazugehörigen Energieeigenwerte nur um den konstanten Beitrag ϵ verschoben sind.

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Gleichung

$$u_{n+1}(x') = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\mathbf{a}^\dagger u_n(x'), \tag{3}$$

die Energieeigenfunktionen $u_n(x')$. Setzt man den Erzeugungsoperator aus dem Skript (Abschnitt 3.5) ein, erhält man die explizite Formel

$$u_{n+1}(x') = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\left(\frac{x}{a} - a\mathrm{d}_x\right) u_n(x'). \tag{4}$$

Die Iteration beginnt mit

$$u_0(x') = N_0 \exp\left(-\frac{x'^2}{2a^2}\right) \quad \text{mit} \qquad N_0 = \left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{1/4}. \tag{5}$$

Berechnen Sie die Energieeigenfunktionen u_n für $n \in \{0,1,2,3\}$. Dabei ist $a = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ (vgl. Skript Abschnitt 3.5). Dabei ist definitionsgemäß weiter

$$u_n(x') = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\mathrm{H}_n\left(\frac{x'}{a}\right)\exp\left(-\frac{x'^2}{2a^2}\right), \tag{6}$$

wobei H_n die Hermite-Polynome sind. Geben Sie aufgrund Ihrer Rechnung auch die Hermite-Polynome für $n \in \{1,2,3\}$ an. Es gilt $\mathrm{H}_0(x'/a) = 1$.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo3-l3-WS2324/index.html`