

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 4

Aufgabe 1 (10 Punkte): Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und Dreiecksungleichung

Das Skalarprodukt für zwei Wellenfunktionen ψ und ϕ ist durch

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \quad (1)$$

definiert und die Norm der Wellenfunktion ψ durch

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (2)$$

Es ist zu beachten, dass es sich beim Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen $L^2(\mathbb{R}^3)$ um einen komplexen Vektorraum handelt und daher im Skalarprodukt das linke Argument konjugiert komplex einget.

- (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das für beliebige Wellenfunktionen ψ , ϕ_1 und ϕ_2 und beliebige Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle \psi | \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \psi | \phi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \psi | \phi_2 \rangle \quad (3)$$

und für beliebige Wellenfunktionen ψ und ϕ

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^* \quad (4)$$

sowie für Wellenfunktionen ψ_1, ψ_2 und ϕ und beliebige Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 | \phi \rangle = \lambda_1^* \langle \psi_1 | \phi \rangle + \lambda_2^* \langle \psi_2 | \phi \rangle \quad (5)$$

gilt.

- (b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für beliebige Wellenfunktionen ψ und ϕ stets die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle \psi | \phi \rangle| \leq \|\psi\| \|\phi\| \quad (6)$$

gilt. Die Gln. (3-5) definieren das Skalarprodukt als eine sog. **Sesquilinearform**.

Hinweis: Verwenden Sie die positive Definitheit des Skalarprodukts für die Wellenfunktion $\psi - \lambda\phi$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle \psi - \lambda\phi | \psi - \lambda\phi \rangle \geq 0, \quad (7)$$

indem sie zunächst das Skalarprodukt ausmultiplizieren und dann

$$\lambda = \frac{\langle \phi | \psi \rangle}{\|\phi\|^2} \quad (8)$$

setzen.

- (c) (3 Punkte) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|. \quad (9)$$

Hinweis: Argumentieren Sie zuerst, dass immer

$$\langle \psi | \phi \rangle + \langle \phi | \psi \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle \psi | \phi \rangle \leq 2 |\langle \psi | \phi \rangle| \quad (10)$$

sein muss. Multiplizieren Sie nun

$$\|\psi + \phi\|^2 = \langle \psi + \phi | \psi + \phi \rangle \quad (11)$$

aus und verwenden dann (10) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (1), um zu beweisen, dass

$$\|\psi + \phi\|^2 \leq (\|\psi\| + \|\phi\|)^2 \quad (12)$$

ist, was äquivalent zur Dreiecksungleichung (9) ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Operatorgymnastik

Im Folgenden seien \hat{A}, \hat{B}, \dots irgendwelche (nicht notwendig selbstadjungierte Operatoren. Die Definition des zu \hat{A} adjungierten Operators \hat{A}^\dagger ist, dass für alle Wellenfunktionen ψ und ϕ stets

$$\langle \psi | \hat{A} \phi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi | \phi \rangle \quad (13)$$

gilt.

Weiterhin ist für zwei Operatoren der Kommutator durch

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (14)$$

definiert. Zeigen Sie folgende Identitäten

- (a) (2 Punkte) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.
- (b) (2 Punkte) $[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = -[\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger]$.
- (c) (3 Punkte) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$.
- (d) (3 Punkte) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$.