Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Lösungen 2

Aufgabe 1: Berechnen von Ableitungen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und berechnen Sie deren Ableitungen.

(a) $f(x) = (x^2)^{-1/3}$

Lösung: Die Funktion ist offenbar in $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Nach der Kettenregel ist die Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2)^{-4/3} 2x = -\frac{2x}{3}(x^2)^{-4/3} = -\frac{2}{3x}(x^2)^{-1/3}. \tag{1}$$

(b) $f(x) = (x^4 - 1)/(x^2 - 1)$

Lösung: $D = \mathbb{R} \setminus -1, 1$. Bevor wir die Funktion ableiten, vereinfachen wir sie, indem wir im Zähler die „3. binomische Formel“ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ mit $a = x^2$ und $b = 1$ anwenden:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x. \tag{2}$$

Bemerkung: In diesem Fall können die Definitionslücken der Funktion f bei $x = \pm 1$ „behoben“ werden. Streng genommen ist aber $\tilde{f} = x^2 + 1$ mit $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine von f verschiedene Funktion, da f nur in D definiert ist. Allerdings gilt für $x \in D$ stets $f(x) = \tilde{f}(x)$.

(c) $f(x) = \arctan(x^2)$

Lösung: Der arctan ist in ganz $\mathbb{R}$ definiert, und damit ist für f der Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. Mit der Kettenregel folgt

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^4} 2x = \frac{2x}{1 + x^4}. \tag{3}$$

Aufgabe 2: Hyperbelfunktionen

Die Hyperbelfunktionen sind durch

$$\sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{4}$$

definiert. Sie heißen „sinus hyperbolicus“, „cosinus hyperbolicus“ und „tangens hyperbolicus“.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der drei Hyperbelfunktionen und berechnen Sie deren Ableitungen.

Lösung: Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind sinh und cosh ebenfalls in ganz $\mathbb{R}$ definiert. Da weiter $\exp x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\cosh x \neq 0$ und folglich auch tanh in ganz $\mathbb{R}$ definiert. Es gilt $\exp'(x) = \exp x$ und folglich mit der Kettenregel $\mathrm{d}/\mathrm{d}x \exp(-x) = -\exp(-x)$. Damit ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \sinh x. \tag{5}$$

Mit der Quotientenregel folgt daraus wiederum

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x. \tag{6}$$

Mit der Formel (8) kann man das auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{7}$$

ausdrücken.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{8}$$

gilt.

Lösung: Man kann diese Aufgabe auf zwei Arten lösen:

(i) Man verwendet einfach die Definition der Hyperbelfunktionen und wendet die binomischen Formeln an:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x &= \frac{1}{4}[\exp x + \exp(-x)]^2 = \frac{1}{4}[\exp(2x) + \exp(-2x) + 2],\\ \sinh^2 x &= \frac{1}{4}[\exp(2x) + \exp(-2x) - 2]\\ &\Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.\end{aligned} \tag{9}$$

(ii) Wir definieren $f(x) = \cosh^2 x - \sinh^2 x$. Mit der Kettenregel findet man für die Ableitung $f'(x) = 2\cosh x \sinh x - 2\sinh x \cosh x = 0$. Eine Funktion, deren Ableitung verschwindet, ist konstant, d.h. $f(x) = f(0) = 1$.

(c) Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen arcosh, arsinh und artanh („area cosinus hyperbolicus" usw.). Dabei ist $\operatorname{arcosh} : [1, \infty] \to [0, \infty]$. Berechnen Sie die Ableitungen mit Hilfe der Formel von der Ableitung der Umkehrfunktion.

Lösungen: (i) Wir setzen $y = \sinh x$ dann ist $x = \operatorname{arsinh} y$ und aus der Ableitungsformel für die Umkehrfunktion folgt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}. \tag{10}$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \operatorname{arsinh} y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}. \tag{11}$$

(ii) Wir setzen $y = \cosh x$ dann ist $x = \operatorname{arcosh} y$ und aus der Ableitungsformel für die Umkehrfunktion folgt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}. \tag{12}$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \operatorname{arcosh} y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}. \tag{13}$$

(iii) Wir setzen $y = \tanh x$ dann ist $x = \operatorname{artanh} y$ und aus der Ableitungsformel für die Umkehrfunktion folgt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{1-\tanh^2 x} = . \tag{14}$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \operatorname{artanh} y = \frac{1}{1-y^2}. \tag{15}$$

(d) Drücken Sie arsinh, arcosh und artanh mit Hilfe des ln aus und bestätigen Sie die in der vorigen Teilaufgabe gefundenen Ableitungsformeln.

Lösungen: Im folgenden schreiben wir zur Abkürzung $A = \exp x$ dann ist

(i) $y = \sinh x = (A - 1/A)/2$. Wir lesen dies als Gleichung für A. Multiplizieren wir die Gleichung mit $2A$ folgt $2Ay = A^2 - 1$ und damit $A^2 - 2Ay - 1 = 0$. Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen

$$A_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2+1}. \tag{16}$$

Da $A=\exp x>0$, kommt nur die Lösung mit dem oberen Vorzeichen in Frage. Damit folgt

$$x=\ln A=\operatorname{arsinh} y=\ln(y+\sqrt{y^2+1}). \tag{17}$$

Die Ableitung erfolgt mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln(y+\sqrt{y^2+1})=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right)=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}\frac{\sqrt{y^2+1}+y}{\sqrt{y^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}. \tag{18}$$

(ii) $y=\cosh x=(A+1/A)/2$. Wir lesen dies als Gleichung für A. Multiplizieren wir die Gleichung mit $2A$ folgt $2Ay=A^2+1$ und damit $A^2-2Ay+1=0$. Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen

$$A_{1/2}=y\pm\sqrt{y^2-1}. \tag{19}$$

Offenbar muss für $y\to\infty$ auch $A\to\infty$ gehen. Also gilt wieder eindeutig das obere Vorzeichen und damit

$$x=\ln A=\operatorname{arcosh} y=\ln(y+\sqrt{y^2-1}). \tag{20}$$

Die Ableitung erfolgt mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right)=\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\frac{\sqrt{y^2-1}+y}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}. \tag{21}$$

(iii) $y=\tanh x=(A-1/A)(A+1/A)=(A^2-1)(A^2+1)$. Multipliziert man mit A^2+1, folgt $y(A^2+1)=A^2-1$ und damit $(y-1)A^2+y+1=0$ bzw. $A^2-(1+y)/(1-y)=0$. Damit folgt

$$x=\operatorname{artanh} y=\ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right). \tag{22}$$

Mit der Ketten- und Quotientenregel erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1+y}{1-y}}\frac{1-y-(-1-y)}{(1-y)^2}=\frac{1}{2}\frac{1-y}{1+y}\frac{2}{(1-y)^2}=\frac{1}{(1+y)(1-y)}=\frac{1}{1-y^2}. \tag{23}$$