

Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

*JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
28.10.2022*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

2. Vorlesung

In diesem Semester (WS 2022/23)
findet die Vorlesung und die Übungstermine
in Präsenz (und auch Online) statt.

Plan für die heutige Vorlesung

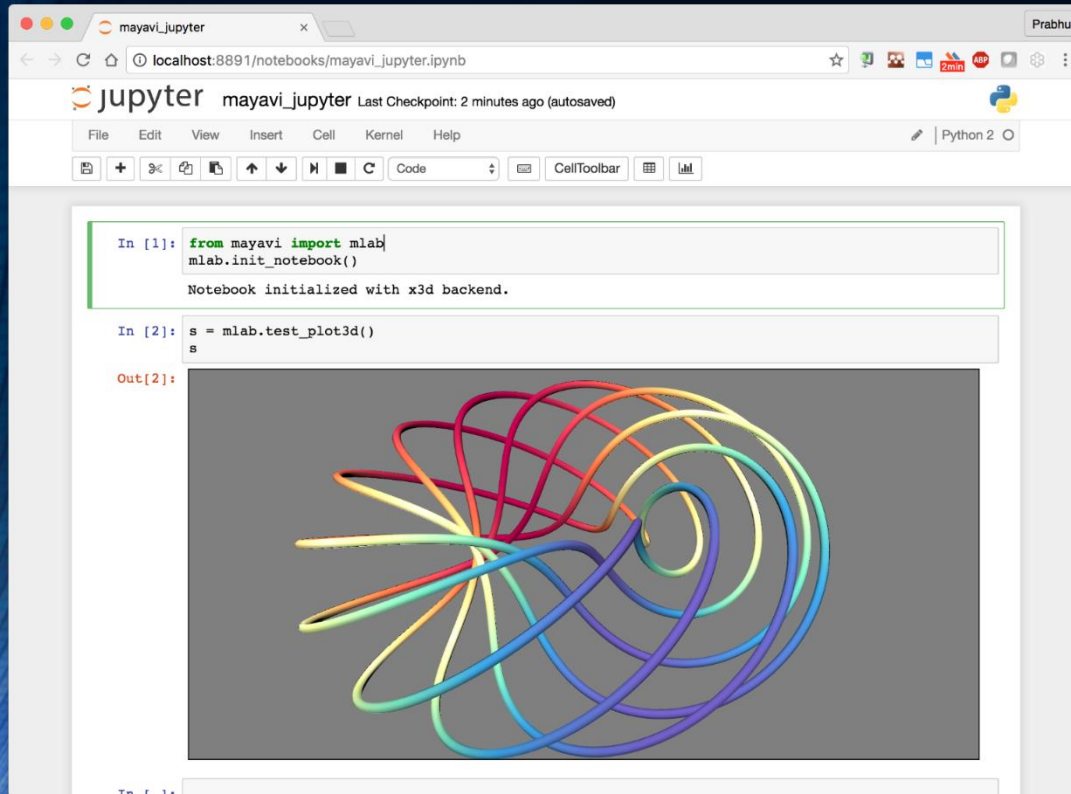
- Kurze Wiederholung der Vorlesung 1
- Definition: Nash-Gleichgewichte und Dominante Strategien
- Gemischte Erweiterung eines Spiels (gemischte Strategien)
- Gemischte Auszahlungsfunktion
- Gemischtes Nash-Gleichgewicht
- Gemischtes Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd und Angsthasen Spiel
- Nash-Gleichgewichte bei (2 Spieler)-(3 Strategien) Spielen
- Gemischtes Nash-Gleichgewicht im Stein-Schere-Papier Spiel

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
PC-Pool Raum 01.120 (auch Zoom-Meeting):
Vorlesungstermine: Freitags von 15.00-17.00 Uhr
Übungstermin 1: Freitags von 13.30-15.00 Uhr
Übungstermin 2: Freitags von 17.00-18.30 Uhr
- Vorlesungs-Materialien (asynchronen Lehrangebote):
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hاناuske/VPSOC/> bzw.
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hاناuske/VPSOC/VPSOC2022.html>
- Übungsaufgaben auf der Online-Lernplattform Lon Capa:
<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>
- Weitere Materialien auf der Online-Lernplattform OLAT
<http://olat.server.uni-frankfurt.de>
- Generelles zur Vorlesung:
Bei erfolgreicher Teilnahme 5 Creditpoints
Benoteter Schein mittels einer mündlichen Prüfung (30 Min.)
- Voraussetzungen:
Programmierkenntnisse von Vorteil

Kurze Einführung in C++

Python Skripts und Jupyter Notebooks



```
In [1]: from mayavi import mlab
mlab.init_notebook()
Notebook initialized with x3d backend.

In [2]: s = mlab.test_plot3d()
s

Out[2]:
```

Einführung in die Programmierung für Studierende der Physik

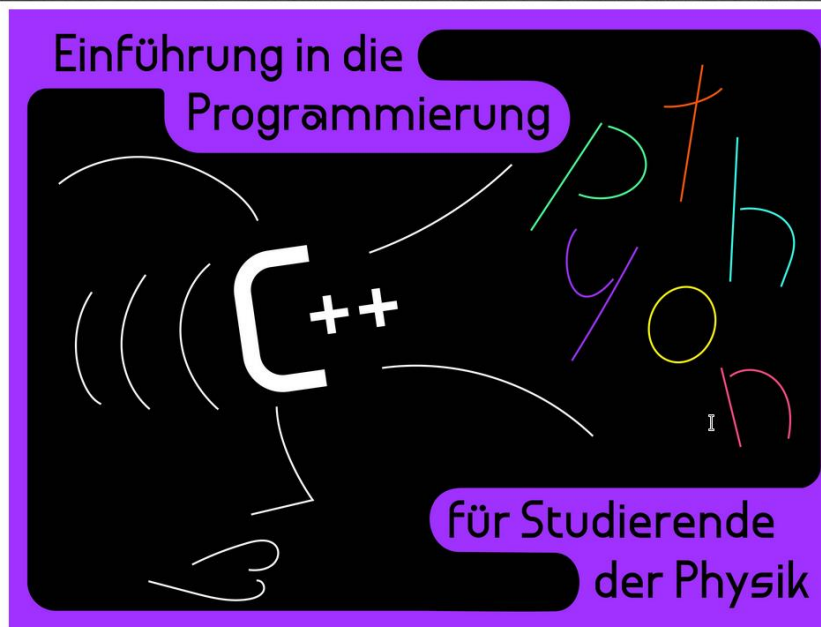


Illustration: Deborah Moldawski

Nächster Zoom Link am 12.04.2022, 15:00-16:00 Uhr: ID: 794 847 5614, PWD: 785453

von Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Einführung in die Programmierung für Studierende der Physik (Introduction to Programming for Physicists) Vorlesung SS 2022

Diese Internetseite fasst die Online-Angebote der Vorlesung *Einführung in die Programmierung für Studierende der Physik* zusammen. Die Vorlesungstermine finden jeweils dienstags von 15.00-16.00 Uhr und donnerstags von 14.00-16.00 Uhr im Raum Phys-0.111 statt. Die Termine der Übungen/Praktika finden Sie auf der [Online-Lernplattform OLAT](#) und die Übungsaufgaben werden im linken Panel unter der jeweiligen Vorlesung und zusätzlich auf [OLAT](#) bereitgestellt.

Die Vorlesung gibt einerseits eine Einführung in die Objekt-orientierte Programmiersprache C++ und vermittelt andererseits einige wesentliche Grundlagen der numerischen Mathematik. Es werden die grundlegenden Elemente der Programmiersprache, das Programmierparadigma der Objektorientierung und Simulationen von komplexen physikalischen Problemen behandelt. Das Hauptanliegen der Vorlesung besteht darin, dass die Studierenden die numerische Lösung eines komplexen physikalischen Problems auf dem Computer erstellen können. Der Schwerpunkt wird hierbei auf der Programmiersprache C++ liegen, wobei für die Visualisierung der berechneten Daten die Skriptsprache Python benutzt wird. Zusätzlich werden die berechneten mathematisch/physikalischen Gleichungen mittels Python Jupyter Notebooks analysiert und illustriert.

Literatur zu C++

- Prof. Dr. Marc Wagner, Vorlesung im WS 2019/20: *Einführung in die Programmierung für Physiker*
- B. W. Kernighan, D. M. Ritchie, Hanser: *Programmieren in C*
- Bjarne Stroustrup 2015: *Die C++ Programmiersprache*
- Bjarne Stroustrup 2009: *Programming: Principles and Practice Using C++*
- Prof. Dr. Claudius Gros, Vorlesung im WS 2021/22: *Advanced*

In der ersten Übungsstunde werden wir uns im PC-Pool mit den Grundlagen des Betriebssystems Linux befassen und sehen, wie man Python Skripte, Jupyter Notebooks und C++ Programme ausführt.

<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/VPROG/>

Inhalte der Vorlesung

In der vorigen Vorlesung: Überblick der gesamten Inhalte der Vorlesungsreihe

SPIELTHEORIE

EVOLUTIONÄRE SPIELTHEORIE

KOMPLEXE NETZWERKE

EVOLUTIONÄRE SPIELTHEORIE AUF
KOMPLEXEN NETZWERKEN

VIRUSAUSBREITUNG AUF KOMPLEXEN
NETZWERKEN

QUANTEN-SPIELTHEORIE

Einführung

Key Question

How can one theoretically describe the time dependent evolution of the strategic behavior of an entire group of decision makers?



Theoretical Models used to answer the question:

(Evolutionary) Game Theory

[von Neumann 1928, Nash 1950, Smith 1972, Weibull 1997,
Szabó/Fáth 07]

Theory of complex networks

[Barabasi/Albert 02, Mendes/Dorogovtsev 02, Jackson 10]

I.1.1 Definition eines Spiels

Die formale mathematische Definition eines *Simultanen (N Spieler)-(m Strategien) Spiels in strategischer Form mit Auszahlung* (siehe z.B. [2,3]) benötigt lediglich die Angabe dreier Größen: Die Menge \mathcal{I} der Spieler, die Menge (der Raum) \mathcal{S} der Strategien der Spieler und ihre Auszahlungsfunktion (Präferenzordnungen) $\$$.

Ein Spiel $\Gamma := (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \$)$ in strategischer Form mit Auszahlung ist hinreichend definiert, wenn die folgenden drei Größen bekannt sind:

- Menge der Spieler: $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$
Die Menge der Spieler \mathcal{I} kann unter Umständen aus unterschiedlichen Teilmengen bestehen, die ihrerseits unterschiedliche Strategiemengen \mathcal{S} besitzen. In sozio-ökonomischen Netzwerken stellen die Spieler die jeweiligen Knoten des Netzwerkes dar (näheres siehe Teil II).
- Menge der reinen Strategien der Spieler: $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^2 \times \dots \times \mathcal{S}^N$
Jeder Spieler $\mu \in \mathcal{I}$ besitzt eine eigene Menge an reinen Strategien $\mathcal{S}^\mu = \{s_1^\mu, s_2^\mu, \dots, s_{m_\mu}^\mu\}$, wobei jede dieser m_μ Strategien eine für ihn mögliche Entscheidung darstellt.
- Präferenzordnungen der Spieler, quantifiziert durch eine vektorwertige Auszahlungsfunktion:

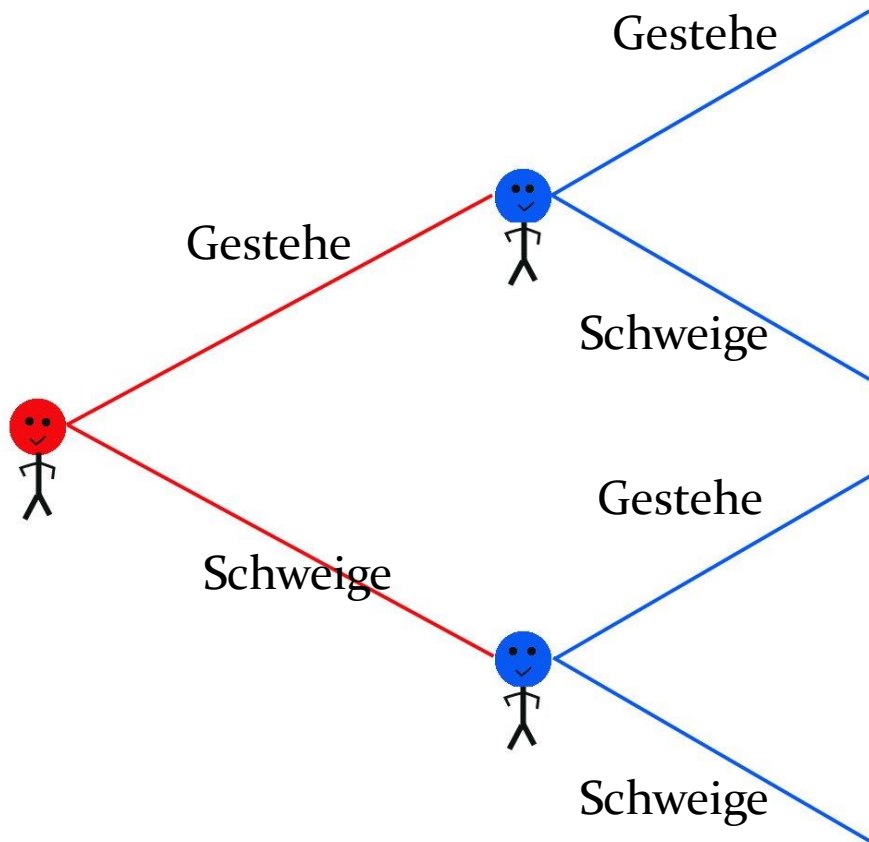
$$\$ = (\$,^1, \$^2, \dots, \$^N) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Nachdem jeder Spieler (ohne die Entscheidung seiner Mitspieler zu kennen) eine Strategie aus seiner Strategiemenge \mathcal{S}^μ ausgewählt hat, beurteilt er die entstehende Strategienkombination \mathcal{S} entsprechend seiner Präferenzordnung (Auszahlungsfunktion) $\$^\mu$.

Um diese formale Definition im einzelnen zu erklären, beschränken sich die folgenden Darlegungen auf den einfachsten Fall des simultanen

Das Gefangenendilemma

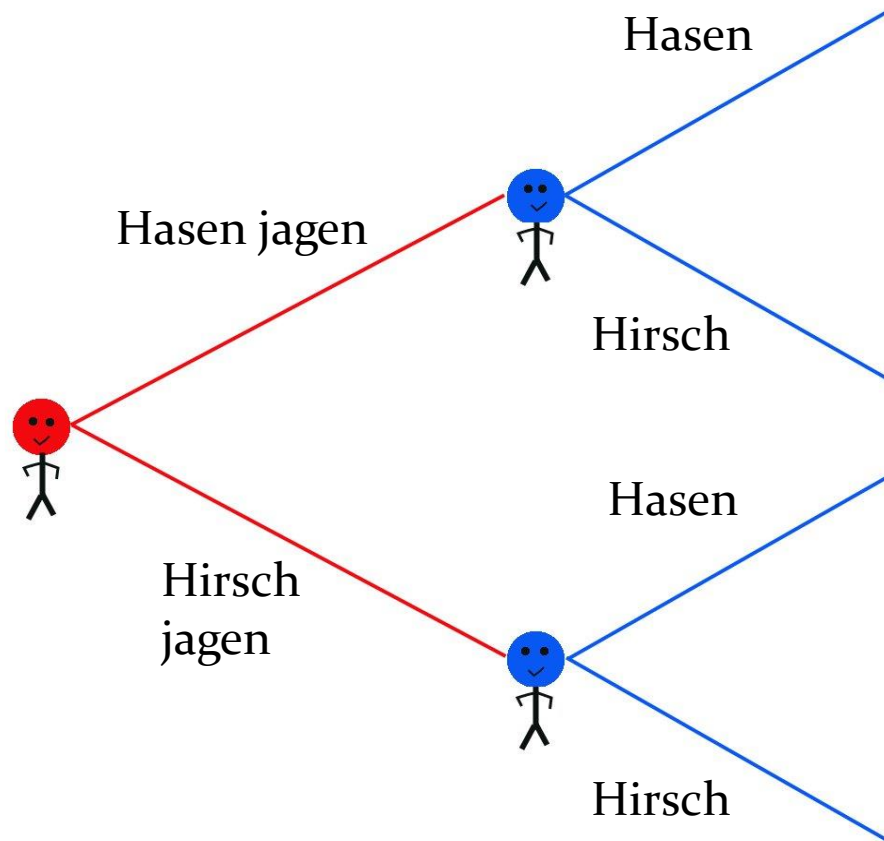
	G	S
G	$(-7, -7)$	$(-1, -9)$
S	$(-9, -1)$	$(-3, -3)$



Bonnie und Clyde werden nach einem missglückten Banküberfall geschnappt und in verschiedenen Zellen untergebracht. Wenn beide schweigen kann der Staatsanwalt sie nur wegen verbotenen Waffenbesitzes für drei Jahre hinter Gitter bringen. Verrät jedoch einer den anderen, dann bekommt der Geständige als Zeuge der Anklage nur für ein Jahr hinter Gitter – der Nichtgeständige muss dann aber für neun Jahre ins Gefängnis. Gestehen beide, so müssen sie sieben Jahre absitzen.

Rousseaus Hirschjagd - Spiel

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2, 2)	(4, 0)
Hirsch	(0, 4)	(5, 5)



Zwei Jägern ist es im Laufe der Jagd gelungen einen Hirsch und vier Hasen einzukreisen. Die Jäger stehen nun vor der Entscheidung die Hasen entkommen zu lassen und gemeinsam den Hirsch zu erlegen oder sofort das Feuer auf die Hasen zu eröffnen. Entscheiden sich beide dafür den Hirsch zu erlegen, dann hat der Hirsch keine Chance. Einen Hirsch kann man für 10 Goldmünzen verkaufen. Entscheiden sich beide für die Hasenjagd, dann erschießt jeder Jäger zwei Hasen, für die man jeweils eine Goldmünze bekommt. Entscheidet sich jedoch nur einer für die Hirschjagd, so kann der Hirsch entkommen und derjenige der sich für die Hasenjagd entschieden hat kann alle vier Hasen erlegen.

Das Nash-Gleichgewicht

Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategienkombination, von der aus kein Spieler einen Vorteil erhalten würde, wenn er von seiner Strategie abweicht. Die Spieler würden keine größere Auszahlung erhalten.

	Spieler B Gestehe	Spieler B Gestehe nicht
Spieler A Gestehe	$(-7, -7)$	$(-1, -9)$
Spieler A Gestehe nicht	$(-9, -1)$	$(-3, -3)$

Das Nash-Gleichgewicht

Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategienkombination, von der aus kein Spieler einen Vorteil erhalten würde, wenn er von seiner Strategie abweicht. Die Spieler würden keine größere Auszahlung erhalten.

	Spieler B Gestehe	Spieler B Gestehe nicht
Spieler A Gestehe	$(-7, -7)$	$(-1, -9)$
Spieler A Gestehe nicht	$(-9, -1)$	$(-3, -3)$

Nash-Gleichgewichte im Hirschjagd-Spiel

	Spieler B Hasen jagen	Spieler B Hirsch jagen
Spieler A Hasen jagen	$(2, 2)$	$(4, 0)$
Spieler A Hirsch jagen	$(0, 4)$	$(5, 5)$

Definition: Dominante Strategie

Im Folgenden werden zwei fundamentale Gleichgewichtskonzepte der Spieltheorie vorgestellt. Wir beschränken uns wieder auf ein *Simultanes (N Spieler)-(m Strategien) Spiel in strategischer Form mit Auszahlung*. Eine Strategienkombination aller Spieler $s = (s^1, s^2, \dots, s^N) \in \mathcal{S}$ setzt sich aus der gewählten Strategie des μ -ten Spielers $s^\mu \in \mathcal{S}^\mu$ und der Strategienkombination aller Spieler mit Ausnahme des μ -ten Spielers $s^{-\mu} := (s^1, s^2, \dots, s^{\mu-1}, s^{\mu+1}, \dots, s^N) \in \mathcal{S}^{-\mu}$ zusammen; also

$$s = (s^\mu, s^{-\mu}) \in \mathcal{S} = \mathcal{S}^\mu \times \mathcal{S}^{-\mu}.$$

Eine Strategienkombination $s^\dagger = (s^{1\dagger}, s^{2\dagger}, \dots, s^{N\dagger})$ ist ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, wenn die folgende Bedingung für alle $\mu \in \mathcal{I}$ erfüllt ist:

Gleichgewicht in dominanten Strategien:

$$\$^\mu (s^{\mu\dagger}, s^{-\mu}) \geq \$^\mu (s^\mu, s^{-\mu}) \quad \forall \mu \in \mathcal{I} \text{ und } \forall s = (s^\mu, s^{-\mu}) \in \mathcal{S}$$

Beispiel: Die dominante Strategie im Gefangenendilemma

		Spieler B Gestehe S_1	Spieler B Gestehe nicht S_2
Spieler A	Gestehe S_1	$(-7, -7)$	$(-1, -9)$
	Gestehe nicht S_2	$(-9, -1)$	$(-3, -3)$

Spieler A: $\$^A: S^A \times S^B \rightarrow \mathfrak{R}$
 $\$^A(S_1, S_1) = -7 \geq -9 = \$^A(S_2, S_1)$
 $\$^A(S_1, S_2) = -1 \geq -3 = \$^A(S_2, S_2)$

Spieler B: $\$^B: S^A \times S^B \rightarrow \mathfrak{R}$
 $\$^B(S_1, S_1) = -7 \geq -9 = \$^B(S_1, S_2)$
 $\$^B(S_2, S_1) = -1 \geq -3 = \$^B(S_2, S_2)$

Definition: Nash-Gleichgewicht

Eine Strategienkombination $s^* = (s^{1*}, s^{2*}, \dots, s^{N*})$ nennt man ein Nash-Gleichgewicht, falls die folgende Bedingung für alle $\mu \in \mathcal{I}$ gilt:

Nash-Gleichgewicht:

$$U^\mu (s^{\mu*}, s^{-\mu*}) \geq U^\mu (s^\mu, s^{-\mu*}) \quad \forall \mu \in \mathcal{I} \text{ und } \forall s^\mu \in \mathcal{S}^\mu$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist demnach eine Strategienkombination, von der aus kein Spieler einen Vorteil erhalten würde, wenn er von seiner Strategie abweichen würde - er würde keine größere Auszahlung erhalten. Es gilt, dass jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien auch ein Nash-Gleichgewicht ist. Im folgenden werden die beiden definierten Gleichgewichtskonzepte am Beispiel zweier simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiele illustriert.

Beispiel: Nash-Gleichgewichte im Hirschjagd-Spiel

	Spieler B Hasen jagen S ₁	Spieler B Hirsch jagen S ₂
Spieler A Hasen jagen S ₁	(2, 2)	(4, 0)
Spieler A Hirsch jagen S ₂	(0, 4)	(5, 5)

Beweis: (S_1, S_1) ist ein Nash-Gleichgewicht des Spiels

Spieler A: $\$^A: S^A \times S^B \rightarrow \mathfrak{R}$
 $\$^A(S_1, S_1) = 2 \geq 0 = \$^A(S_2, S_1)$

Spieler B: $\$^B: S^A \times S^B \rightarrow \mathfrak{R}$
 $\$^B(S_1, S_1) = 2 \geq 0 = \$^B(S_1, S_2)$

Beispiel eines (2 Personen)-(3 Strategien) Spiels:

Schere-Stein-Papier

(2 – Personen) – (3 – Strategien) – Spiel Γ :

$\Gamma := (A, (S^1, S^2), (\$^1, \$^2))$

Menge der Spieler : $A = \{1, 2\} = \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$

Strategienmenge des 1 - ten Spielers (Alice):

$S^1 = \{s_1^1, s_2^1, s_3^1\} = \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}\}$

Strategienmenge des 2 - ten Spielers :

$S^2 = \{s_1^2, s_2^2, s_3^2\} = \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}\}$

Auszahlungsfunktion des 1. und 2. Spielers :

$\$^1 : S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\$^2 : S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$\$^1(\text{Stein}, \text{Stein}) = 0$ und $\$^2(\text{Stein}, \text{Stein}) = 0$

$\$^1(\text{Stein}, \text{Schere}) = 1$ und $\$^2(\text{Stein}, \text{Schere}) = -1$

$\$^1(\text{Stein}, \text{Papier}) = -1$ und $\$^2(\text{Stein}, \text{Papier}) = 1$

...

	Stein	Schere	Papier
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Beispiel: Zwei Spieler – drei Strategien

Gibt es eine dominante Strategie? Geben Sie die Nash-Gleichgewichte an.

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(1, 3)	(2, 7)	(3, 9)
Strategie 2	(2, 1)	(3, 1)	(3, 8)
Strategie 3	(3, 1)	(2, 1)	(5, 3)

(Strategie 3 , Strategie 3) !

Die Strategiekombination (**Strategie 3 , Strategie 3**) ist das einzige Nash-Gleichgewicht dieses unsymmetrischen Spiels. Es gibt keine dominante Strategie.

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(1 , 3)	(2 , 7)	(3 , 9)
Strategie 2	(2 , 1)	(3 , 1)	(3 , 8)
Strategie 3	(3 , 1)	(2 , 1)	(5 , 3)

The table displays the payoffs for a game with three strategies. The payoffs are shown as ordered pairs (Player 1, Player 2). Red arrows indicate the best response for each player from each cell. Blue arrows indicate the unique Nash equilibrium at (3, 3).

Mathematische Überprüfung des Nash-Gleichgewichtes

Behauptung:

(S_3, S_3) ist Nash-Gleichgewicht.

Beweis:

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(1, 3)	(2, 7)	(3, 9)
Strategie 2	(2, 1)	(3, 1)	(3, 8)
Strategie 3	(3, 1)	(2, 1)	(5, 3)

Spieler A: $\$^A: S^A \times S^B \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\$^A(S_3, S_3) = 5 \geq 3 = \$^A(S_2, S_3)$$

$$\$^A(S_3, S_3) = 5 \geq 3 = \$^A(S_1, S_3)$$

Spieler B: $\$^B: S^A \times S^B \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\$^B(S_3, S_3) = 3 \geq 1 = \$^B(S_3, S_2)$$

$$\$^B(S_3, S_3) = 3 \geq 1 = \$^B(S_3, S_1)$$

Schere-Stein-Papier

Kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien!

Es gibt keine dominante Strategie und auch keine Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien

	Stein	Schere	Papier
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

The diagram illustrates the cyclical nature of the Rock-Paper-Scissors game. Red arrows show the cycle: Stein beats Papier, Papier beats Schere, and Schere beats Stein. Blue arrows show the reverse cycle: Papier beats Stein, Stein beats Schere, and Schere beats Papier. This cycle demonstrates that no strategy is dominant and there is no pure strategy Nash equilibrium.

Gemischte Strategien

Die Menge der gemischten Strategien der Spieler $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}^1 \times \tilde{\mathcal{S}}^2 \times \dots \times \tilde{\mathcal{S}}^N$ setzt sich aus den einzelnen Mengen der gemischten Strategien der Spieler zusammen. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers $\mu \in \mathcal{I}$ ($\tilde{\mathcal{S}}^\mu$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien \mathcal{S}^μ verstanden werden, wobei die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien des Spielers μ aus m_μ reellwertigen Zahlen bestehen, die folgenden Normalisierungsbedingungen unterliegen:

$$\tilde{\mathcal{S}}^\mu = \left\{ (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu, \dots, \tilde{s}_{m_\mu}^\mu) \mid \sum_{i=1}^{m_\mu} \tilde{s}_i^\mu = 1, \tilde{s}_i^\mu \geq 0, i = 1, 2, \dots, m_\mu \right\}$$

Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien

Die einzelnen Werte \tilde{s}_i^μ können als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie i interpretiert werden.

Unter Verwendung der gemischten Strategien lässt sich eine gemischte Auszahlungsfunktion der Spieler wie folgt definieren:

$$\tilde{\$} = (\tilde{\$}^1, \tilde{\$}^2, \dots, \tilde{\$}^N) : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}^N, \text{ wobei } \tilde{\$}^\mu(\tilde{s}^1, \tilde{s}^2, \dots, \tilde{s}^N) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \dots \sum_{i_N=1}^{m_N} \$^\mu(s_{i_1}^1, s_{i_2}^2, \dots, s_{i_N}^N) \prod_{\nu=1}^N \tilde{s}_{i_\nu}^\nu$$

Im folgenden wird das Konzept der gemischten Erweiterung für den Fall eines (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels illustrieren.

Die Menge der gemischten Strategien des Spielers A ($\tilde{\mathcal{S}}^A$) und B ($\tilde{\mathcal{S}}^B$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien (\mathcal{S}^A und \mathcal{S}^B) verstanden werden. Die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien eines Spielers $\mu = A, B$ ($\tilde{s}^\mu = (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu) \in \mathcal{S}^\mu$) besteht aus zwei reellwertigen Zahlen ($\tilde{s}_1^\mu \in [0, 1]$ und $\tilde{s}_2^\mu \in [0, 1]$) und kann als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie 1 (\tilde{s}_1^μ) bzw. der Strategie 2 (\tilde{s}_2^μ) interpretiert werden. Desweiteren gilt die folgende Normalisierungsbedingung: $\tilde{s}_1^\mu + \tilde{s}_2^\mu = 1 \forall \mu = A, B$. Unter

Verwendung der Auszahlungsmatrizen des Spielers A ($\hat{\A) und B ($\hat{\B) schreibt sich die gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers $\mu = A, B$ wie folgt:

$$\tilde{\$}^\mu : (\tilde{\mathcal{S}}^A \times \tilde{\mathcal{S}}^B) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{\$}^\mu((\tilde{s}_1^A, \tilde{s}_2^A), (\tilde{s}_1^B, \tilde{s}_2^B)) = \$_{11}^\mu \tilde{s}_1^A \tilde{s}_1^B + \$_{12}^\mu \tilde{s}_1^A \tilde{s}_2^B + \$_{21}^\mu \tilde{s}_2^A \tilde{s}_1^B + \$_{22}^\mu \tilde{s}_2^A \tilde{s}_2^B$$

Gemischte Auszahlungsfunktion im (2x2)-Spiel

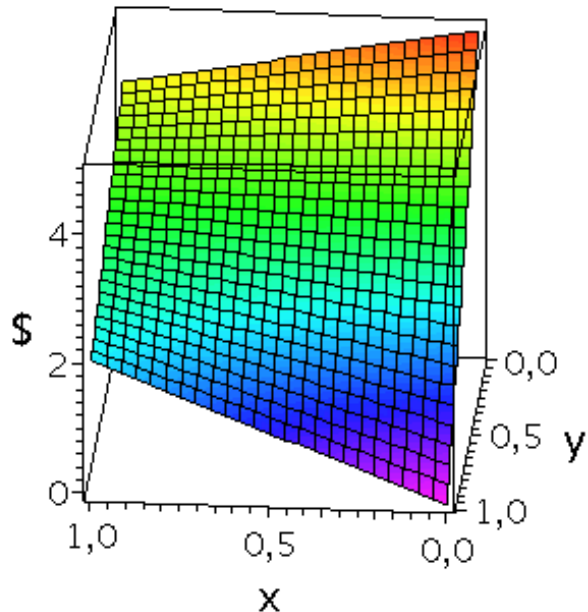
Aufgrund der Normalisierungsbedingung vereinfacht sich die gemischte Auszahlungsfunktion wie folgt:

$$\tilde{\$}^{\mu} : ([0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) = \$_{11}^{\mu} \tilde{s}^A \tilde{s}^B + \$_{12}^{\mu} \tilde{s}^A (1 - \tilde{s}^B) + \$_{21}^{\mu} (1 - \tilde{s}^A) \tilde{s}^B + \$_{22}^{\mu} (1 - \tilde{s}^A) (1 - \tilde{s}^B)$$

, wobei $\tilde{s}^A := \tilde{s}_1^A$, $\tilde{s}^B := \tilde{s}_1^B$, $\tilde{s}_2^A = 1 - \tilde{s}_1^A$ und $\tilde{s}_2^B = 1 - \tilde{s}_1^B$.

Auszahlung an Spieler A



Auszahlungsfunktionen im Hirschjagt-Spiel

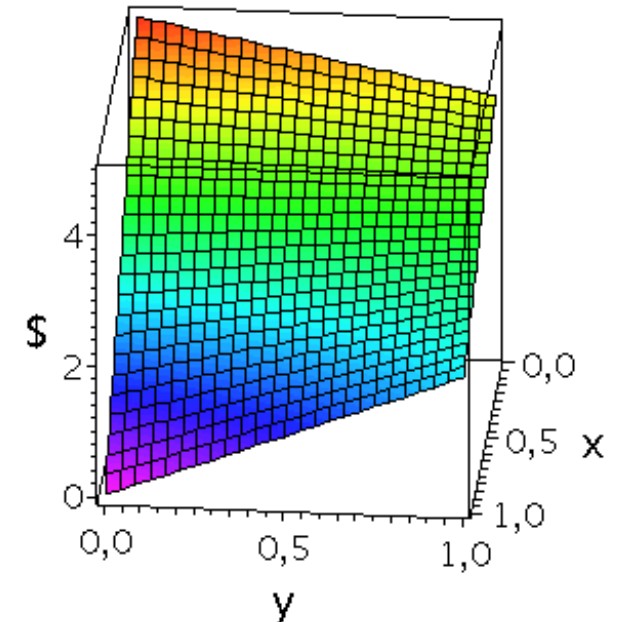
$$\tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) = \tilde{\$}^A(x, y)$$

$$\tilde{\$}^B(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) = \tilde{\$}^B(x, y)$$

$$x, y \in [0, 1]$$

	Spieler B Hasen jagen	Spieler B Hirsch jagen
Spieler A Hasen jagen	(2, 2)	(4, 0)
Spieler A Hirsch jagen	(0, 4)	(5, 5)

Auszahlung an Spieler B

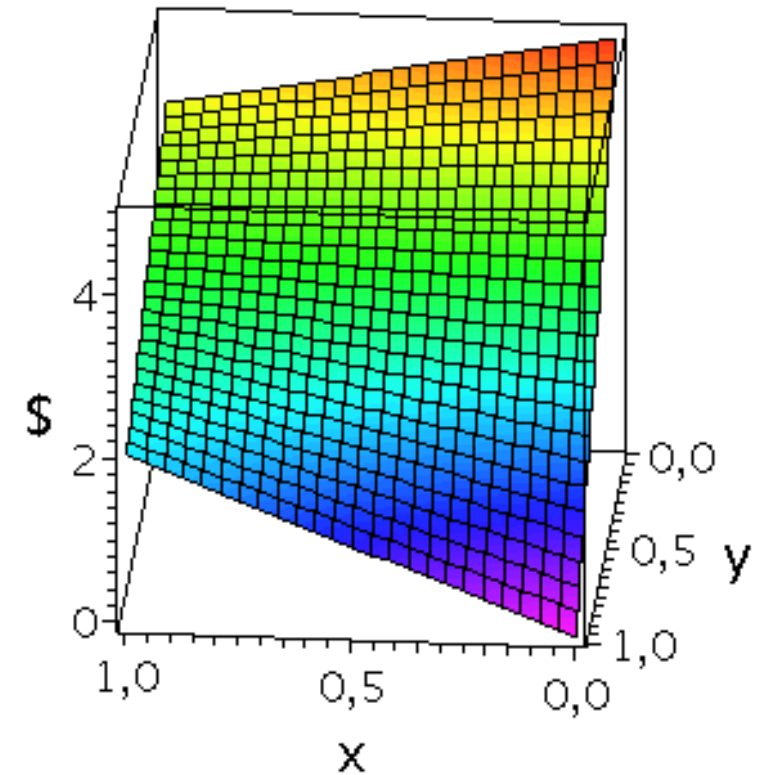


Gemischte Auszahlungsfunktion im (2x2)-Spiel Beispiel Hirschjagd-Spiel

$$\begin{aligned}
 \tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) &= \tilde{\$}^A(x, y) = \$_{11}^A xy + \$_{12}^A x(1-y) + \$_{21}^A (1-x)y + \$_{22}^A (1-x)(1-y) \\
 &= 2xy + 4x(1-y) + 0(1-x)y + 5(1-x)(1-y) \\
 &= 2xy + 4x - 4xy + 5 - 5x - 5y + 5xy \\
 &= 3xy - x - 5y + 5
 \end{aligned}$$

	Spieler B Hasen jagen	Spieler B Hirsch jagen
Spieler A Hasen jagen	(2, 2)	(4, 0)
Spieler A Hirsch jagen	(0, 4)	(5, 5)

Auszahlung an Spieler A



Dominante Strategien und Nash-Gleichgewicht mit gemischter Auszahlungsfunktion

Eine Strategienkombination $(\tilde{s}^{A\dagger}, \tilde{s}^{B\dagger})$ ist ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Gleichgewicht in dominanten Strategien:

$$\tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^{A\dagger}, \tilde{s}^B) \geq \tilde{\$}^{\mu}(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) \quad \forall \mu = A, B \text{ und } \tilde{s}^A, \tilde{s}^B \in [0, 1]$$

Eine Strategienkombination $(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*})$ nennt man ein Nash-Gleichgewicht, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Nash-Gleichgewicht:

$$\tilde{\$}^A(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*}) \geq \tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^{B*}) \quad \forall \tilde{s}^A \in [0, 1]$$

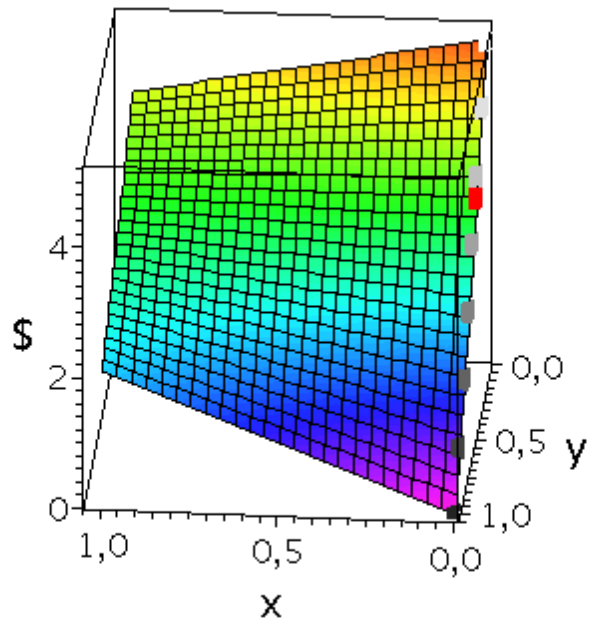
$$\tilde{\$}^B(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*}) \geq \tilde{\$}^B(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^B) \quad \forall \tilde{s}^B \in [0, 1]$$

Auszahlungsfunktion des Spielers A im
Hirschjagd-Spiel

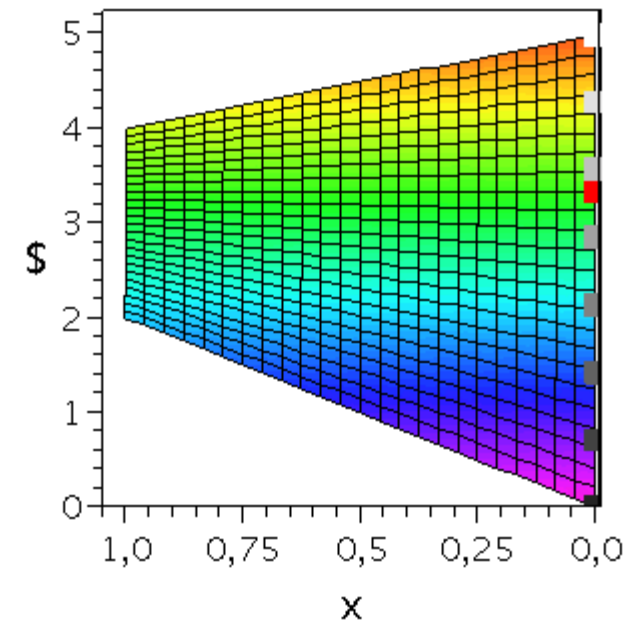
$$\tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B) = \tilde{\$}^A(x, y)$$

$$x, y \in [0, 1]$$

x = 0.



x = 0.



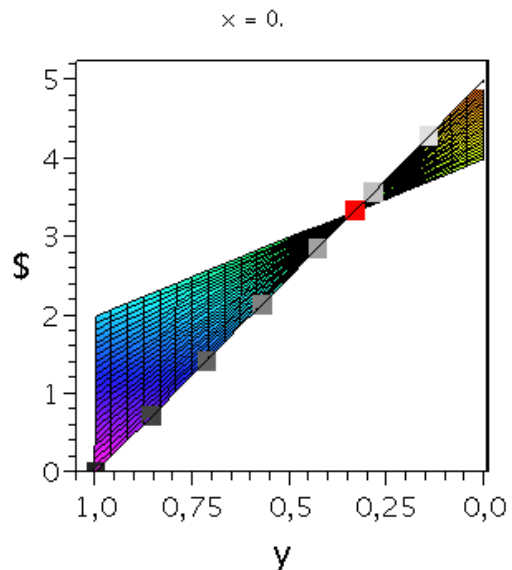
Das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichts besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfläche verschwindet. Man nennt dann ein solches Nash-Gleichgewicht $(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*})$ ein internes Nash-Gleichgewicht bzw. ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

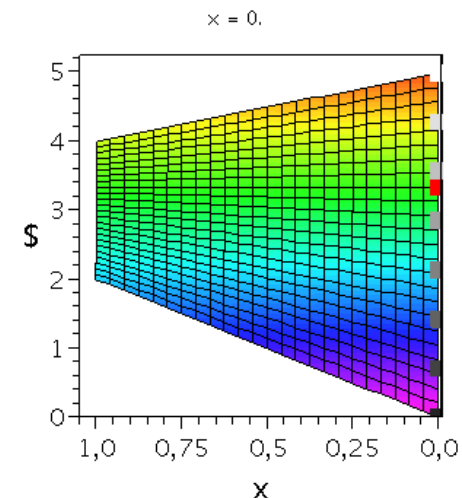
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^A} \right|_{\tilde{s}^B = \tilde{s}^{B*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^A \in [0, 1] , \tilde{s}^{B*} \in]0, 1[$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^B(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^B} \right|_{\tilde{s}^A = \tilde{s}^{A*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^B \in [0, 1] , \tilde{s}^{A*} \in]0, 1[$$



Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd-Spiel liegt bei der Strategienkombination $(x=1/3, y=1/3)$.

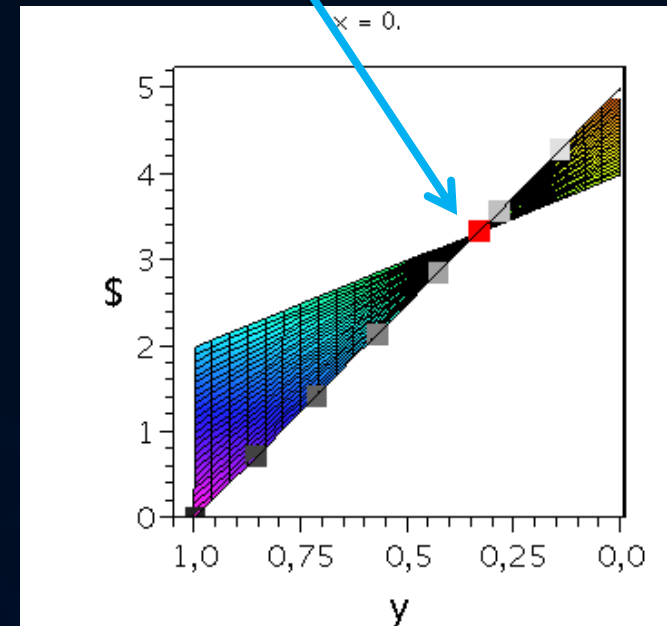
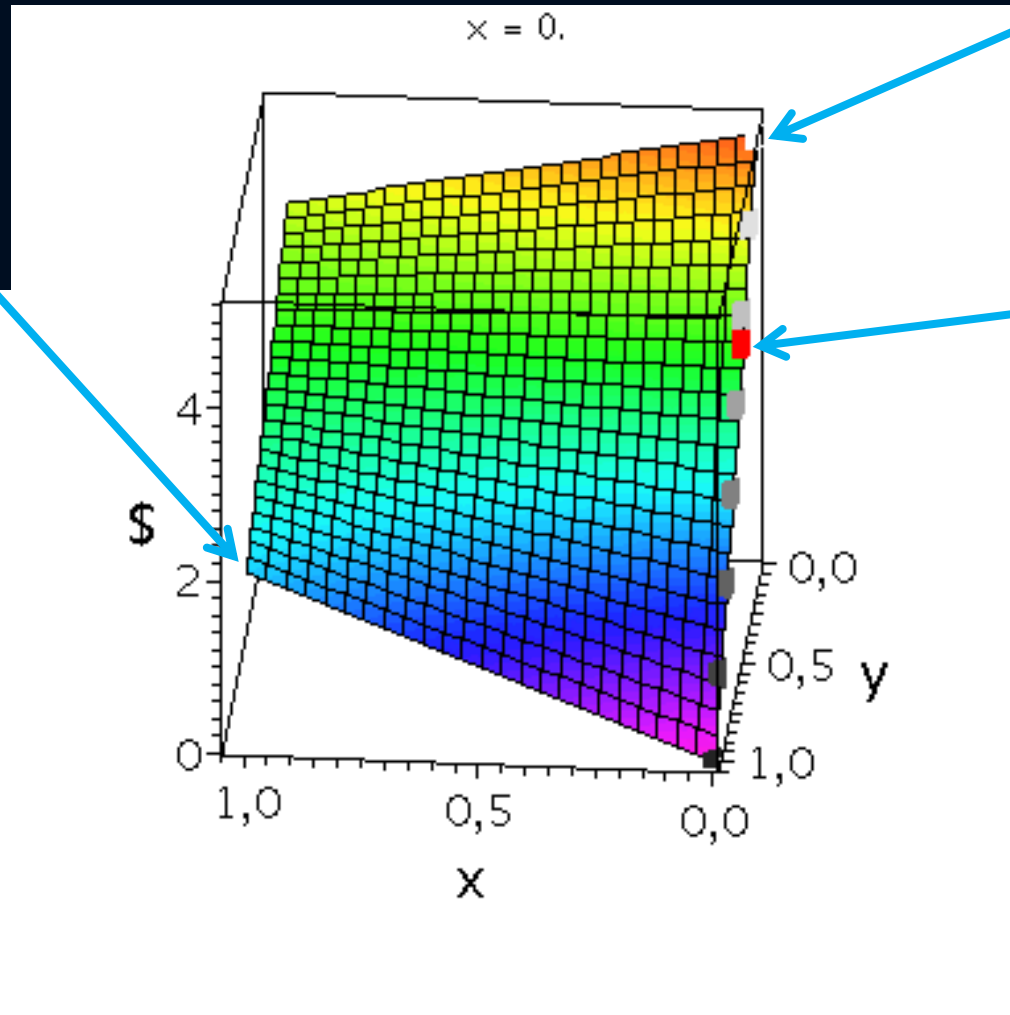
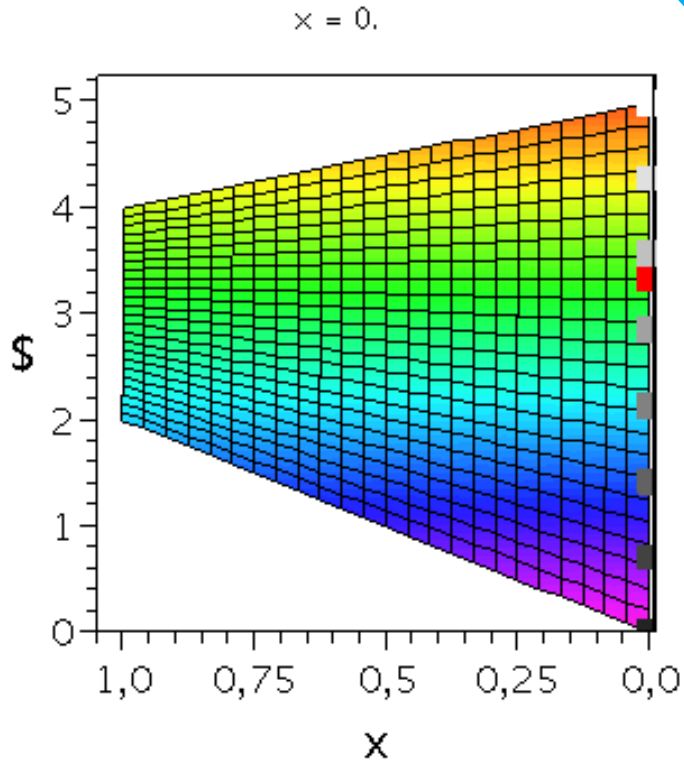


Das Nash-Gleichgewichte im Hirschjagd-Spiel

Reines Nash-Gleichgewicht
 $(x,y)=(1,1)=$
(Hasen jagen, Hasen jagen)

Reines Nash-Gleichgewicht
 $(x,y)=(0,0)=($ Hirsch jagen,Hirsch jagen)

Gemischtes Nash-Gleichgewicht
 $(x,y)=(1/3, 1/3)$



Zwei Nash Gleichgewichte in reinen Strategien im Angsthassen Spiel

		Spieler B	
		Weiche nicht aus	Weiche aus
Spieler A	Weiche nicht aus	$(-10, -10)$	$(2, 0)$
	Weiche aus	$(0, 2)$	$(1, 1)$

Beispiel: Das Angsthassen-Spiel (Chicken Game)

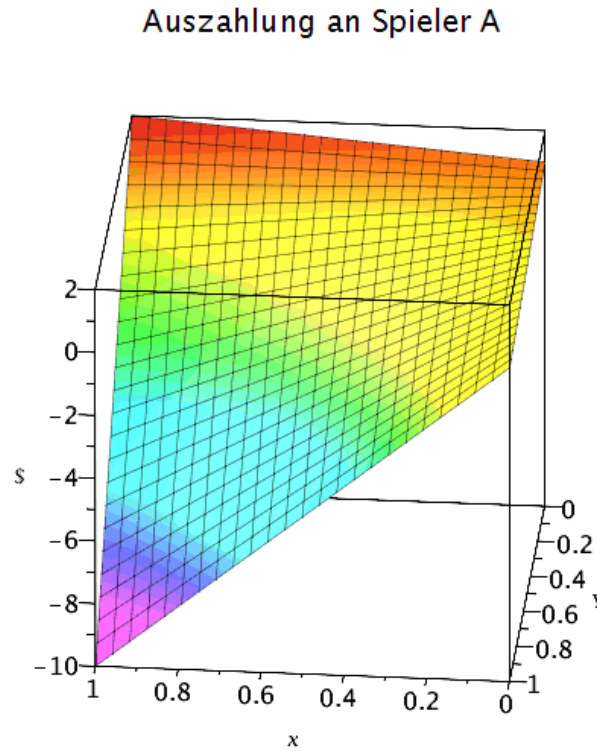
Das *Angsthassen-Spiel* ist ein simultanes (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel und kann z.B. mittels der folgenden Geschichte illustriert werden (siehe z.B. S.16 in [2]).

"Auf einer einsamen Landstraße in Indien, bei der es nur eine geteerte Fahrbahn gibt, kommen sich zwei Autos mit hoher Geschwindigkeit entgegen. Beide Fahrer stehen nun vor der Entscheidung ob sie dem Anderen die Fahrbahn überlassen und Ausweichen oder mit hoher Geschwindigkeit weiterfahren um zu hoffen, dass der Andere ausweicht." Eine weitere Deutung des *Angsthassen-Spiel* basiert auf dem Film von Nicholas Ray "Denn sie wissen nicht was sie tun" aus dem Jahre 1955 (mit James Dean): "Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto herrausspringt."

Ähnliche Spiele: Das Spiel mit dem Untergang, das Falke-Taube Spiel

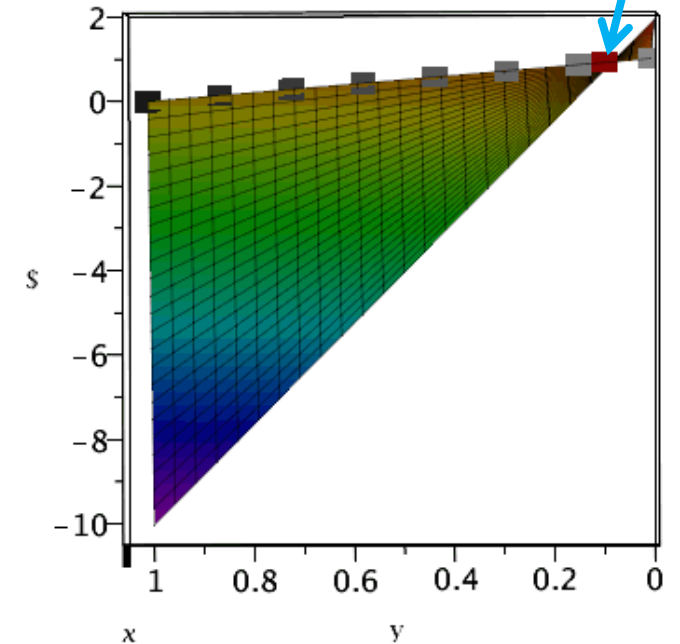
Gemischtes Nash-Gleichgewicht im Angsthasen-Spiel

Gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers A

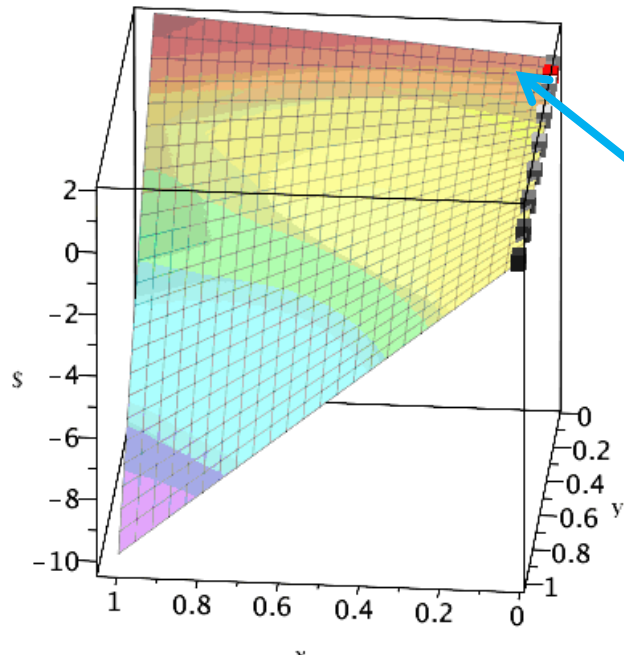


Gemischtes Nash-Gleichgewicht $(x,y)=(1/11, 1/11)$

Auszahlung an Spieler A



Auszahlung an Spieler A



Gemischtes Nash-Gleichgewicht $(x,y)=(1/11, 1/11)$

Berechnung des Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien (I)

		y_1	y_2	$1 - y_1 - y_2$
		Stein	Schere	Papier
x_1	Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
x_2	Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
$1 - x_1 - x_2$	Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Auszahlungsfunktion des 1-ter Spieler: $\$^1 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned}
 \$^1(x_1, x_2, y_1, y_2) &= 0 \cdot x_1 \cdot y_1 + 1 \cdot x_1 \cdot y_2 + (-1) \cdot x_1 \cdot (1 - y_1 - y_2) + \\
 &\quad + (-1) \cdot x_2 \cdot y_1 + 0 \cdot x_2 \cdot y_2 + 1 \cdot x_2 \cdot (1 - y_1 - y_2) + \\
 &\quad + 1 \cdot (1 - x_1 - x_2) \cdot y_1 + (-1) \cdot (1 - x_1 - x_2) \cdot y_2 + 0 \cdot (1 - x_1 - x_2) \cdot (1 - y_1 - y_2) \\
 &= x_1 \cdot (1 - 3 \cdot y_2) + x_2 \cdot (3 \cdot y_1 - 1) - y_1 + y_2
 \end{aligned}$$

Möglichkeit zur Berechnung eines inneren Nash-Gleichgewichts

$$\frac{\partial \$^1(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_1} \Big|_{y_1=y_1^*, y_2=y_2^*} = (1 - 3 \cdot y_2^*) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_2^* = \frac{1}{3} \approx 33,33\%$$

$$\frac{\partial \$^1(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_2} \Big|_{y_1=y_1^*, y_2=y_2^*} = (3 \cdot y_1^* - 1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_1^* = \frac{1}{3} \approx 33,33\%$$

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers:

$$\$^1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 \cdot (1 - 3 \cdot y_2) + x_2 \cdot (3 \cdot y_1 - 1) - y_1 + y_2$$

Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei

$$(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Genauso für 2-ten Spieler

	Stein	Schere	Papier
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Überprüfung des gemischten, inneren Nash-Gleichgewichts (I)

Behauptung:

Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei folgender Strategienkombination

$$\left((x_1^*, x_2^*, x_3^*), (y_1^*, y_2^*, y_3^*) \right) = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)$$

Beweis für den 1. Spieler:

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers:

$$\$^1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 \cdot (1 - 3 \cdot y_2) + x_2 \cdot (3 \cdot y_1 - 1) - y_1 + y_2$$

Überprüfung des Nash - Gleichgewichts:

$$\$^1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \geq \$^1\left(x_1, x_2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) =$$

$$\$^1\left(x_1, x_2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = x_1 \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + x_2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \quad \forall x_1, x_2 \in [0,1]$$

Überprüfung des gemischten, inneren Nash-Gleichgewichts (II)

Behauptung:

Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei folgender Strategienkombination

$$\left((x_1^*, x_2^*, x_3^*), (y_1^*, y_2^*, y_3^*) \right) = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)$$

Beweis für den 2. Spieler:

Auszahlungsfunktion des 2 - ten Spielers :

$$\$^2(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1 \cdot (3 \cdot x_2 - 1) + y_2 \cdot (1 - 3 \cdot x_1) + x_1 - x_2$$

Überprüfung des Nash - Gleichgewichts :

$$\$^2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \geq \$^2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, y_1, y_2\right) =$$

$$\$^2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, y_1, y_2\right) = y_1 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) + y_2 \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad \forall y_1, y_2 \in [0,1]$$

Vorlesung 2

Wir betrachten im Folgenden die gemischte Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels in strategischer Form mit Auszahlung. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers A ($\tilde{\mathcal{S}}^A$) und B ($\tilde{\mathcal{S}}^B$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien (\mathcal{S}^A und \mathcal{S}^B) verstanden werden. Die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien eines Spielers $\mu = A, B$ ($\tilde{s}^\mu = (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu) \in \tilde{\mathcal{S}}^\mu$) bestehen aus zwei reellwertigen Zahlen ($\tilde{s}_1^\mu \in [0, 1]$ und $\tilde{s}_2^\mu \in [0, 1]$) und können als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie 1 (\tilde{s}_1^μ) bzw. der Strategie 2 (\tilde{s}_2^μ) interpretiert werden. Aufgrund der Normalisierungsbedingung (siehe Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien)

$$\tilde{s}_1^\mu + \tilde{s}_2^\mu = 1 \quad \forall \mu = A, B \quad \text{setzen wir } x := \tilde{s}_1^A \text{ und } y := \tilde{s}_1^B, \text{ und somit } \tilde{s}_2^A = 1 - x \text{ und } \tilde{s}_2^B = 1 - y.$$

Die gemischte Auszahlungsfunktion $\tilde{\mathcal{S}}^\mu(x, y)$ schreibt sich dann wie folgt

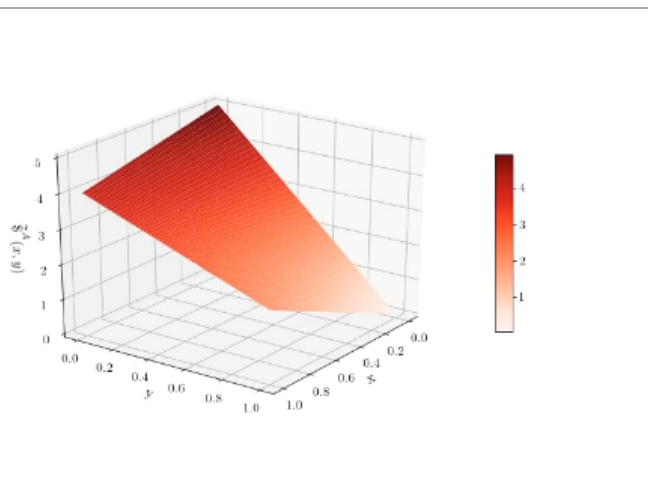
$$\tilde{\mathcal{S}}^\mu : ([0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{\mathcal{S}}^\mu(x, y) = \mathcal{S}_{11}^\mu xy + \mathcal{S}_{12}^\mu x(1 - y) + \mathcal{S}_{21}^\mu (1 - x)y + \mathcal{S}_{22}^\mu (1 - x)(1 - y) \quad .$$

Ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichtes besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfunktion verschwindet. Man nennt dann ein solches Nash-Gleichgewicht (x^*, y^*) ein internes Nash-Gleichgewicht bzw. ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{S}}^A(x, y)}{\partial x} \right|_{y=y^*} &= 0 \quad \forall x \in [0, 1], y^* \in]0, 1[\\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{S}}^B(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x^*} &= 0 \quad \forall y \in [0, 1], x^* \in]0, 1[\end{aligned}$$

Beispiel: Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagd Spiel



Wir wollen nun die oben beschriebene gemischte Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels am Beispiel des Hirschjagd-Spiels verdeutlichen. Aufgrund der dem Spiel zugrundeliegenden Auszahlungsmatrix gilt für den Spieler A $\mathcal{S}_{11}^A = 2, \mathcal{S}_{12}^A = 4, \mathcal{S}_{21}^A = 0$ und $\mathcal{S}_{22}^A = 5$ und die gemischte Auszahlungsfunktion vereinfacht sich zu:

$\tilde{\mathcal{S}}^A(x, y) = 3xy - x - 5y + 5$. Den Wert des gemischten Nash-Gleichgewichtes erhält man durch die Nullstelle der partiellen Ableitung dieser Funktion: $\frac{\partial \tilde{\mathcal{S}}^A(x, y)}{\partial x} = 3y - 1 = 0$; man erhält: $y^* = 1/3$. Da es sich um ein symmetrisches Spiel handelt gilt auch $x^* = 1/3$. Die nebenstehende Animation zeigt die Auszahlungsfläche des Spielers A im Hirschjagd Spiel. Das gemischte Nash-Gleichgewicht $y^* = 1/3$ kann visuell verdeutlicht werden, indem man die Fläche in Blickrichtung der x-Achse betrachtet.

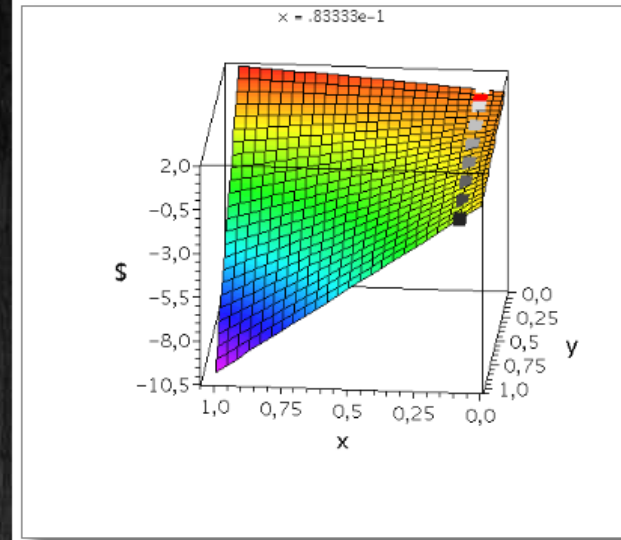
In den unten angegebenen Links finden Sie das der Berechnung zugrundeliegende Jupyter Notebook und alternativ das entsprechende Maple Worksheet.

Vorlesung 2

Das Konzept des Nash-Gleichgewichtes wurde in der letzten Vorlesung mittels der *Bestantwort-Pfeile* an mehreren klassischen Spielen illustriert. In dieser Vorlesung werden die beiden fundamentalen Gleichgewichtskonzepte der Spieltheorie, die dominante Strategien und die Nash-Gleichgewichte, formal mathematisch definiert. Die bisher dargestellten spieltheoretischen Konzepte basierten auf einer diskreten Strategiemenge der Spieler, die sogenannte Menge der reinen Strategien \mathcal{S} . Wir erweitern nun die Menge der reinen Strategien \mathcal{S} zur Menge der gemischten Strategien $\tilde{\mathcal{S}}$. Ein solches Spiel bezeichnet man als die *gemischte Erweiterung eines simultanen (N Spieler)-(m Strategien) Spiels in strategischer Form mit Auszahlung*. Gemischte Strategien können als die

Wahrscheinlichkeit des Spielers zur Wahl einer reinen Strategie verstanden werden. Es wird eine gemischte Auszahlungsfunktion der Spieler \mathcal{S} formuliert und die beiden fundamentalen

Gleichgewichtskonzepte der Spieltheorie in der gemischten Erweiterung definiert (siehe Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien). Das Konzept des Nash-Gleichgewichtes in gemischten Strategien (internes Nash-Gleichgewicht) wird am Beispiel des Hirschjagd- und Angsthassen-Spiels diskutiert.



Das neben stehende Bild stellt die gemischte

Auszahlungsfunktion $\tilde{\mathcal{S}}^A$ des Spielers A im Angsthassen-Spiel dar. Die animierten Rechtecke zeigen die Veränderung der Auszahlung bei festgehaltener gemischter Strategie y des Spielers B und Variation der Strategie x des Spielers A. Das rote Rechteck veranschaulicht das interne, gemischte Nash-Gleichgewicht.

Das entsprechende Jupyter Notebook findet man auf der Internetseite der Vorlesung und auf der OLAT Lernplattform

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 02.11.2020

Erster Vorlesungsteil:

Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte am Beispiel der folgenden Spiele:

Gefangenendilemma, Hirschjagt- und Angsthasen-Spiel

Einführung

In diesem Python Notebook werden die in der Vorlesung definierten Gleichgewichtskonzepte (dominante Strategie, reine und gemischte Nash-Gleichgewichte) am Beispiel dreier simultaner, symmetrischer (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiele illustriert. Zunächst wird das Python Modul "sympy" eingebunden, das ein Computer-Algebra-System für Python bereitstellt und symbolische Berechnungen und im speziellen Matrix-Berechnungen relativ einfach möglich macht.

```
In [1]: from sympy import *
init_printing()
```

Das Gefangenendilemma

Definition der Auszahlungsmatrix für Spieler A (\hat{A}):

```
In [2]: D_A=Matrix([[ -7, -1], [-9, -3]])
D_A
```

```
Out[2]: 
$$\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$$

```

Da sich das Spiel um ein symmetrisches (2 Personen) (2 Strategien) Spiel handelt, erhält man die Auszahlungsmatrix für Spieler B durch die transponierte Matrix

Aufgabe: Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien

Betrachten Sie ein simultanes (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiel in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungsmatrix. Die Menge der Spieler sei $\mathcal{I} = \{A, B\}$, die Menge der reinen Strategien sei $\mathcal{S}^A = \mathcal{S}^B = \{s_1, s_2\}$ und die Präferenzordnungen der Spieler sei durch folgende Auszahlungstabelle quantifiziert:

A/B	s_1	s_2
s_1	(130 , 130)	(11 , 122)
s_2	(122 , 11)	(143 , 143)

Welche der folgenden Strategienkombinationen sind reine Nash-Gleichgewichte des Spiels?

- Select all that are **True**.
- (s_1, s_1) ist ein Nash-Gleichgewicht
 - (s_1, s_2) ist ein Nash-Gleichgewicht
 - (s_2, s_1) ist ein Nash-Gleichgewicht
 - (s_2, s_2) ist ein Nash-Gleichgewicht

Submit Answer Tries 0/5

Aufgabe: Gemischtes Nash-Gleichgewicht

[Main Menu](#) [Contents](#) [Grades](#) [Syllabus](#)

[←](#) [→](#) [Course Contents](#) » ... » [Aufgaben](#) » **Gemischtes Nash-Gleichgewicht im (2x2)-Spiel**

[Notes](#) [Evaluate](#) [Feedback](#) [Print](#) [Info](#)

Betrachten Sie die gemischte Erweiterung eines simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels in strategischer Form mit symmetrischer Auszahlungsmatrix. Die Menge der Spieler sei $\mathcal{I} = \{A, B\}$, die Menge der reinen Strategien sei $\mathcal{S}^A = \mathcal{S}^B = \{s_1, s_2\}$ und die Präferenzordnungen der Spieler sei durch die unten stehende Auszahlungstabelle quantifiziert. Die reinen Strategien entsprechen den folgenden gemischten Strategien: $s_1 \hat{=} \tilde{s}^B = \tilde{s}^B = 1$ und $s_2 \hat{=} \tilde{s}^A = \tilde{s}^A = 0$.

A/B	s_1	s_2
s_1	(392 , 392)	(21 , 20)
s_2	(20 , 21)	(303 , 303)

Bei welcher gemischten Strategienkombination $(\tilde{s}^{A*}, \tilde{s}^{B*})$ befindet sich das gemischte Nash-Gleichgewicht?

$\tilde{s}^{A*} = \tilde{s}^{B*} =$ (bitte geben Sie den numerischen Wert auf mindestens 3 Nachkommastellen an; z.B. 0.111)

Tries 0/5

[Post Discussion](#)

[Send Feedback](#)