Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Physik

Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Harald O. Jeschke

Frankfurt, 11. Dezember 2015

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III - Elektrodynamik
Wintersemester 2015/16

Blatt 9
(Abgabetermin: Freitag, 18. 12. 2015, 12:00 Uhr in der Vorlesung)

Name(n)	
Übungsgruppe	
Punkte	

Aufgabe 34 (**Elektrischer Quadrupoltensor**) (5 Punkte)

a) In der Vorlesung wurde die elektrische Quadrupolstrahlung in der Form

(1) $$\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{e^{ikr}}{2r}\int d^3r'\big[\mathbf{j}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{e}\cdot\mathbf{j})\big]$$

eingeführt (Skript Gl. (12.31)). Zeigen Sie, dass

(2) $$\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -\omega^2\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{e^{ikr}}{2r}\int d^3r'(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\big]$$

(Skript Gl. (12.32)) dazu äquivalent ist.

b) Identifizieren Sie in Gl. (2) den elektrischen Quadrupoltensor

(3) $$Q_{\alpha\beta}\int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\big(3r'^{\alpha}r'^{\beta} - \delta_{\alpha\beta}r'^2\big)$$

Aufgabe 35 (**Retardierte Potentiale für einen Draht**) (5 Punkte)

Gegeben ist ein unendlich langer gerader und dünner Draht, der den Strom

(4) $$I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I_0, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

führt, d.h. der Strom wird zur Zeit $t = 0$ instantan entlang des gesamten Drahtes eingeschaltet.

a) Berechnen Sie die retardierten Potentiale $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ im gesamten Raum außerhalb des Drahtes.
b) Berechnen Sie die zugehörigen **E**- und **B**-Felder.
c) Wird Energie ins Unendliche abgestrahlt? Begründen Sie Ihre Antwort.
d) Prüfen Sie nach, dass Sie im Grenzwert $t \to \infty$ wieder die bekannten elektrostatischen Felder erhalten.

Aufgabe 36 (**Legendre-Polynome**) (5 Punkte)

a) Berechnen Sie die Entwicklung folgender Funktionen von x bzw. von $x = \cos\theta$ nach Legendre-Polynomen, $P_\ell(x)$, im Bereich $x \in [-1, 1]$:
   i) $\delta(x - x_0)$, wobei $|x_0| \leqslant 1$. Achten Sie auf den Fall $|x_0| = 1$.
   ii) $\Theta(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}.$
   Berechnen Sie hierfür nur die ersten zwei nichtverschwindenen Koeffizienten.
   iii) $\sin^4(\theta)$, wobei $P_\ell(x)$ hier als $P_\ell(\cos\theta)$ zu verstehen ist.
b) Beweisen Sie mithilfe der ersten Ableitung der erzeugenden Funktion nach s die Rekursion von Bonnet:

$$(\ell + 1)P_{\ell+1}(x) = (2\ell + 1)xP_\ell(x) - \ell P_{\ell-1}(x). \tag{5}$$

Diese Rekursion ist numerisch stabil und wird in der Praxis oft verwendet, um $P_\ell(x)$ für verschiedenen ℓ und fixes x auszuwerten.

Aufgabe 37 (**Kugelflächenfunktionen**) (5 Punkte)

a) In der Vorlesung wurde der Absteigeoperator für Kugelflächenfunktionen definiert als

$$A_- = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{6}$$

Der zugehörige Aufsteigeoperator ist

$$A_+ = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass A_- und A_+ nicht kommutieren, d.h. $A_-A_+ - A_+A_- = \text{const} \neq 0$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die (im Skript erwähnten) Normierungsfaktoren wie folgt sind:

$$\begin{aligned} A_+Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{(l - m)(l + m + 1)}Y_{l,m+1}(\vartheta, \varphi) \\ A_-Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{(l + m)(l - m + 1)}Y_{l,m-1}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \tag{8}$$

b) Berechnen Sie $A_+Y_{22}(\vartheta, \varphi)$.