Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Physik

Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Harald O. Jeschke

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Frankfurt, 4. Dezember 2015

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III - Elektrodynamik
Wintersemester 2015/16

Blatt 8
(Abgabetermin: Freitag, 11. 12. 2015, 12:00 Uhr in der Vorlesung)

Name(n)	
Übungsgruppe	
Punkte	

Aufgabe 31 (**Retardierte Potentiale**) (8 Punkte)

a) Schreiben Sie die Differentialgleichungen auf, die das Skalar- und Vektorpotential, $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, in der Lorentz-Eichung erfüllen und beweisen Sie, dass die naiv generalisierten statischen Potentiale

(1) $$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

und

(2) $$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

wobei $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ die Ladungs- und Stromquellen sind, die obengenannten Differentialgleichungen streng genommen nicht erfüllen.

b) Beweisen Sie, dass das retardierte Skalarpotential

(3) $$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

die entsprechenden Differentialgleichungen in der Lorentz-Eichung erfüllt.

Aufgabe 32 (**Klassisches Atom**) (6 Punkte)

Ein Elektron mit Ladung $-e$ und Masse m bewege sich auf einer kreisförmigen Bahn um ein stationäres Proton der Ladung e und der Masse $M \to \infty$.

a) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Elektrons aus dem Gleichgewicht von Zentrifugal- und Coulombkraft.

b) Bestimmen Sie den Energieverlust des Elektrons pro Zeiteinheit aus der abgegebenen Strahlungsleistung.

c) Berechnen Sie $\frac{dr}{dt}$ aus dem Energieverlust $\frac{d\epsilon}{dt}$ und bestimmen Sie durch Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $r(t)$. Berechen Sie die Zeit t_0, bei der $r(t_0) = 0$.

d) Bestimmen Sie einen Zahlenwert für t_0 unter der Annahme, dass $r(0) = a_B$ der Bohrsche Radius ist.

Aufgabe 33 (**Wellengleichung in Kugelkoordinaten**) (6 Punkte)

a) Für kugelsymmetrische Probleme hängt die Lösung der Wellengleichung nicht von den Winkeln ab, d.h. $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r, t)$. Überzeugen Sie sich, dass in diesem Fall die Wellengleichung in Kugelkoordinaten die Gestalt

$$\Box\psi = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \tag{4}$$

annimmt. Zeigen Sie damit, dass die Lösung der kugelsymmetrischen Wellengleichung von folgender Form ist:

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r}\big(u_+(kr + \omega t) + u_-(kr - \omega t)\big) \tag{5}$$

b) Nehmen Sie zusätzlich an, dass $u_\pm(kr \pm \omega t)$ periodisch ist, d.h. $u_\pm \propto e^{i(kr \pm \omega t)}$. Skizzieren Sie $\mathrm{Re}(\psi_-) = \frac{1}{r}\mathrm{Re}(u_-)$ als Funktion von r. Welches sind die Flächen konstanter Phase, und wie bewegen Sie sich?

c) Gegeben sei eine elektromagnetische Kugelwelle mit $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)}$. Zeigen Sie, dass $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ notwendigerweise $\mathbf{E} \perp \mathbf{r}$ impliziert, und interpretieren Sie das.