Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Physik

Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Harald O. Jeschke

Frankfurt, 20. November 2015

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III - Elektrodynamik
Wintersemester 2015/16

Blatt 6
(Abgabetermin: Freitag, 27. 11. 2015, 12:00 Uhr in der Vorlesung)

Name(n)	
Übungsgruppe	
Punkte	

Aufgabe 22 (**Vektor-Wellengleichung**) (5 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Kugelwelle $f(r-ct)/r$ die Wellengleichung

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] f(\mathbf{r},t) = 0. \tag{1}$$

erfüllt. Manche vektorielle Größen $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ erfüllen auch eine Wellengleichung

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \mathbf{F}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{2}$$

wobei der Differentialoperator jetzt komponentenweise anzuwenden ist. Nehmen Sie an, eine gegebene skalare Funktion $\Psi(\mathbf{r},t)$ erfüllt die Differentialgleichung (1) und beweisen Sie, dass $\mathbf{r}\times\nabla\Psi(\mathbf{r},t)$ die Vektor-Wellengleichung (2) erfüllt.

Aufgabe 23 (**Fourier-Transformation der Maxwell-Gleichungen**) (5 Punkte)

a) Es sei $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ ein quadratintegrables Vektorfeld und $f(\mathbf{r},t)$ eine quadratintegrable Skalarfunktion von der Position $\mathbf{r}$ und der Zeit t. Schreiben Sie die folgenden Größen im $(\mathbf{k},\omega)$-Fourier-Raum auf, wobei $\mathbf{k}$ und ω jeweils die Fourier-konjugierten Variablen von $\mathbf{r}$ und t sind:
   i) $\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$.
   ii) $\nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$.
   iii) $\nabla f(\mathbf{r},t)$.

iv) $\nabla^2 f(\mathbf{r}, t)$.

v) $\dfrac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$.

vi) $\dfrac{\partial^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$.

b) Schreiben Sie die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Feld im Vakuum im Fourier-Raum auf.

Aufgabe 24 (**Überlagerung ebener Wellen in einer Dimension**) (5 Punkte)

Das Vektorpotential $\mathbf{A}(x, t)$ sei durch

$$\mathbf{A}(x, t) = \mathbf{e}_y \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, A_k e^{i[kx - \omega(k)t]} \right] \tag{3}$$

gegeben, wobei

$$A_k = 2\pi \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 k^2}, \qquad a > 0 \tag{4}$$

und

$$\omega(k) = |k| c. \tag{5}$$

a) Berechnen Sie $\mathbf{A}(x, t)$ explizit und skizzieren Sie diese Funktion.

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}$.

c) Berechnen Sie die Energiedichte w_F.

d) Berechnen Sie den Poynting-Vektor.

Aufgabe 25 (**Elektromagnetisches Feld im Vakuum**) (2 Punkte)

Eine elektromagnetische Welle im Vakuum werde in kartesischen Koordinaten durch das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_0 \cos(kz - \omega t - \theta) \\ E_0' \cos(k'z - \omega' t - \theta') \\ E_0'' \cos(k''z - \omega'' t - \theta'') \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \omega = ck \quad \omega' = ck' \quad \omega'' = ck'' \tag{6}$$

beschrieben. Welche Bedingungen muss man an E_0, E_0', E_0'', k, k', k'', θ, θ' und θ'' stellen, damit $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ eine Lösung der Maxwell-Gleichungen darstellt?

Aufgabe 26 (**Maxwellscher Stresstensor**) (3 Punkte)

Bestimmen Sie alle Elemente des Maxwellschen Stresstensors für eine monochromatische ebene Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet und in x-Richtung linear polarisiert ist, d.h.

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{B}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t + \delta) \mathbf{e}_y \tag{7}$$