Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Physik

Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Harald O. Jeschke

Frankfurt, 6. November 2015

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III - Elektrodynamik
Wintersemester 2015/16

Blatt 4
(Abgabetermin: Freitag, 13. 11. 2015, 12:00 Uhr in der Vorlesung)

Name(n)	
Übungsgruppe	
Punkte	

Aufgabe 14 (**Helmholtz-Theorem**) (6 Punkte)

Das Helmholtz-Theorem besagt, dass ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ eindeutig bestimmt ist, wenn seine Divergenz

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \tag{1}$$

und seine Rotation

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{W}(\mathbf{r}) \tag{2}$$

festgelegt sind und für $\mathbf{r} \to \infty$ schnell genug abfallen.

a) Beweisen Sie das Helmholtz-Theorem. Zeigen Sie dazu, dass das Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, geschrieben als

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{3}$$

mit skalarem Potential ϕ und Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ aus

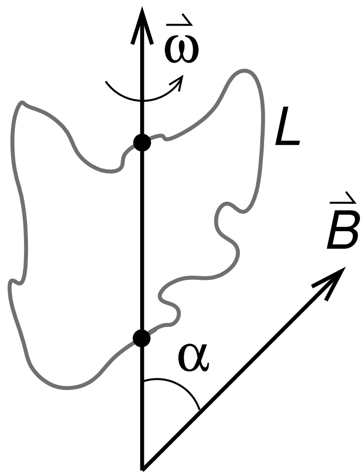
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\mathbf{W}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{4}$$

die Gleichungen (1) und (2) erfüllt. Zeigen Sie dann, dass diese Lösung eindeutig ist, wenn wir $\lim_{r\to\infty} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ fordern.

b) Das oben bewiesene Helmholtz-Theorem besagt, dass ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ in eine longitudinale (rotationsfreie, wirbelfreie) und in eine transversale (divergenzfreie, quellenfreie) Komponente zerlegt werden kann: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^{L}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}^{T}(\mathbf{r})$
Welche Eichung (Lorenz oder Coulomb) führt zu einer direkten Trennung vom elektrischen Feld in longitudinale und transversale Komponente?

c) Ist das Magnetfeld ein longitudinaler oder ein transversaler Vektor? Ist diese Eigenschaft Eichungs-abhängig?

Aufgabe 15 (**Induktion**) (3 Punkte)



Eine ebene, sonst aber beliebig geformte Leiterschleife L rotiere in einem homogenen $\vec{B}$-Feld mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine feste Achse, an der sie an zwei Punkten fixiert ist. Die Drehachse liegt also stets in der Ebene der Leiterschleife L. Der Winkel zwischen dem Magnetfeld $\vec{B}$ und der Drehachse $\vec{\omega}$ sei α. Berechnen Sie die in L induzierte Spannung $U(t)$. Von welchen Parametern hängt die Induktionsspannung ab?

Aufgabe 16 (**Bewegungsgleichung im Magnetfeld**) (6 Punkte)

Ein Elektron tritt aus einer Probe mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ aus, die in einem Winkel φ zur Oberflächennormale steht. Die Kammer, in der sich die Probe befindet, ist schlecht abgeschirmt: es existiert ein homogenes externes Magnetfeld $\mathbf{B}$ entlang der Oberflächennormale überall in der Kammer.

a) Berechnen und beschreiben Sie die Trajektorie des Teilchens in Abwesenheit und in Gegenwart vom Magnetfeld.
b) Ändert sich der Betrag der Geschwindigkeit mit der Zeit?
c) Detektoren geladener Teilchen messen meist entweder die Energie oder die Flugzeit des jeweiligen Teilchens. Für welche der beiden Kategorien ist die Präsenz eines Magnetfelds kritischer?

Aufgabe 17 (**Biot-Savart-Gesetz: Rotierende Scheibe**) (5 Punkte)

Eine kreisförmige Scheibe mit Radius R hat eine homogenverteilte Ladung Q. Wir legen ein System kartesischer Koordinaten mit der z-Achse senkrecht zur Scheibe. Die Scheibe rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse.

a) Bestimmen Sie die Ladungsdichte der Scheibe. Hinweis: Verwenden Sie die Diracsche Delta-Funktion und die Heaviside-Funktion.
b) Bestimmen Sie die Stromdichte.
c) Berechnen Sie das Magnetfeld an der z-Achse. Hinweis:

$$\int dx \, \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}. \tag{5}$$