Lösungsvorschlag zu Blatt3 – Theoretische Physik III: Elektrodynamik WS 2015/16

Abgabetermin: keine Abgabe, sondern Wertung als Präsenzübung

Prof. Dr. Claudius Gros, Institut für Theoretische Physik, Goethe-Universität Frankfurt

Übungsgruppenleiter: Dr. Harald O. Jeschke

Aufgabe 11 (**Gaußsches Gesetz in Zylinderkoordinaten**) (7 Punkte)

Ein unendlicher Zylinder mit Radius a hat eine homogene Ladungsdichte ρ_0.

a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ überall im Raum.

Das elektrische Feld muss aufgrund der vorhandenen Symmetrie senkrecht zur Zylinderachse sein: für alle anderen Komponenten lassen sich Ladungselemente finden, die zum Verschwinden dieser Komponenten führen.

Das Gaußsche Gesetz läßt sich hier für ein koaxiales zylindrisches Volumen leicht anwenden. Die "Deckel" des Gauß-Zylinders tragen nicht bei zum Fluss bei, sodass wir für $0 < r < a$ haben

$$E 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_0 \pi r^2 L, \tag{1}$$

also

$$E = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}. \tag{2}$$

Für $r > a$ haben wir

$$E = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r}. \tag{3}$$

b) Das elektrische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ kann mithilfe von

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{l}\, \mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{4}$$

berechnet werden, wobei $\mathbf{r}_0$ der Potentialursprung ist und $\mathrm{d}\mathbf{l}'$ ein Linienelement für die Integration ist. Kann man in dem jetztigen Fall den Potentialursprung ins Unendliche versetzen? Schlagen Sie eine Lösung vor und berechnen Sie entsprechend das Potential überall im Raum.

Wie wir gleich sehen werden, verschwindet das Potential im jetztigen Fall nicht im Unendlichen. Wir müssen uns einen anderen Punkt als Potentialursprung $\mathbf{r}_{\mathrm{orig}}$ aussuchen, beispielsweise die Oberfläche des Zylinders. Es heißt dann

$$V(\mathbf{r}) = -\int_a^r \mathrm{d}r\, \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} = -\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \ln\frac{r}{a}. \tag{5}$$

Hier sieht man, dass $V(\mathbf{r})$ im Unendlichen ($a = \infty$) tatsächlich nicht verschwindet.

c) Wie viel Arbeit muss man gegen das elektrische Feld leisten, um eine externe Punktladung q entlang der radialen Koordinate r von $r = r_0$ auf $r = r_1$ zu bringen? Es gilt $r_0 > a$ und $r_1 > a$. Kann diese Arbeit von der Ursprungswahl abhängen?

$$W = q\,[V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_0)] = ... = -\frac{\rho_0 a^2 q}{2\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_0}. \tag{6}$$

Es kostet also etwas ($W > 0$), eine positive Ladung näher ($r_1 < r_0$) zu einem positiv-geladenen ($\rho_0 > 0$) Zylinder zu bringen, wie man schon aufgrund der Coulomb-Abstoßung erwarten würde. Diese Größe, wie alle physikalisch messbaren Größen, darf nicht vom Potentialursprung abhängen.

Aufgabe 12 (Biot-Savart-Gesetz) (7 Punkte)

a) Ein Strom I fließt durch eine kreisförmige Schlaufe mit Radius R. Legen Sie ein System kartesischer Koordinaten mit Ursprung am Zentrum der Schlaufe und z-Achse senkrecht dazu (Rechte-Hand-Regel). Berechnen Sie mithilfe vom Biot-Savart-Gesetz das magnetische Feld an der Symmetrieachse der Schlaufe. Bestätigen Sie, dass das Magnetfeld an der Symmetrieachse nur eine z-Komponente hat.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{7}$$

Quellpunkt: $\mathbf{r}' = R(\cos\varphi' \mathbf{e}_x + \sin\varphi' \mathbf{e}_y)$
Pfad: $\mathbf{l} = \mathbf{r}'(\varphi')$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.
Pfadelement für das Linienintegral:

$$d\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{r}'}{d\varphi'} d\varphi' = R d\varphi' (-\sin\varphi' \mathbf{e}_x + \cos\varphi' \mathbf{e}_y). \tag{8}$$

Wir werden das Magnetfeld nur auf der z-Achse bestimmen, sodass $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -R\cos\varphi' \mathbf{e}_x - R\sin\varphi' \mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \tag{9}$$

und

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}. \tag{10}$$

Weiters,

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= R d\varphi' \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\sin\varphi' & \cos\varphi' & 0 \\ -R\cos\varphi' & -R\sin\varphi' & z \end{vmatrix} \\ &= R d\varphi' \left[z\cos\varphi' \mathbf{e}_x + R\sin^2\varphi' \mathbf{e}_z + R\cos^2\varphi' \mathbf{e}_z + z\sin\varphi' \mathbf{e}_y \right] \\ &= R d\varphi' \left[z\cos\varphi' \mathbf{e}_x + z\sin\varphi' \mathbf{e}_y + R\mathbf{e}_z \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Es heißt dann

$$\frac{4\pi}{\mu_0 I} \mathbf{B} = \int_0^{2\pi} d\varphi'\, R \frac{z\cos\varphi' \mathbf{e}_x + z\sin\varphi' \mathbf{e}_y + R\mathbf{e}_z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{12}$$

Die Terme mit $\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$ verschwinden und es bleibt nunmehr

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{\mu_0 I}\mathbf{B} &= \mathbf{e}_z \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi' \\ &= \mathbf{e}_z 2\pi \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}},\end{aligned} \tag{13}$$

sodass

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{e}_z. \tag{14}$$

b) Es befindet sich ein magnetischer Dipol $\mathbf{m} = \mu_z \mathbf{e}_z$ in der Symmetrieachse der Schlaufe. Wird das Dipolmoment von der Schlaufe abgestoßen oder angezogen? Wir drehen jetzt das Dipolmoment um: $\mathbf{m}' = -\mu_z \mathbf{e}_z$. Wird das Dipolmoment jetzt von der Schlaufe abgestoßen oder angezogen?

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}) \\ &= \nabla\left[\mu_z \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right] \\ &= \frac{\mu_z\mu_0 I}{2}R^2\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2z}{(R^2+z^2)^{5/2}}\mathbf{e}_z \\ &= -\frac{3}{2}\mu_z\mu_0 I R^2 \frac{z}{(R^2+z^2)^{5/2}}\mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Der Dipol $\mu_z\mathbf{e}_z$ wird zum Zentrum der Schlaufe hingezogen.
Der Dipol $-\mu_z\mathbf{e}_z$ wird vom Zentrum der Schlaufe abgestoßen.

Aufgabe 13 (Verifikation von Integralsätzen) (6 Punkte)

a) Verifizieren Sie den Satz von Gauß

$$\int_F \mathbf{A}\cdot d\mathbf{F} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dV$$

durch explizites Ausrechnen der Integrale auf beiden Seiten der Gleichung. Die Integrale laufen über Oberfläche bzw. Volumen einer Kugel von Radius R.

(i) Vektorfeld $\mathbf{A} = \mathbf{r}$.
Wir arbeiten mit Kugelkoordinaten r, ϑ, φ, d.h.

$$\mathbf{r} = r\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$$

und haben damit

$$\text{Flächenelement: } dF = r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$
$$\text{Volumenelement: } dV = r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Die Flächennormale ist $\mathbf{e}_r$. Dann gilt für die linke Seite des Satzes von Gauß:

$$\int_F \mathbf{A}\cdot d\mathbf{F} = \int_F \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dF = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta\ \sin\vartheta R^3 \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r = 4\pi R^3$$

Für die rechte Seite:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\cdot\mathbf{r} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3$$

$$\curvearrowright \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\ dV = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta\ \sin\vartheta \int_0^R dr\ r^2 = 12\pi\Big[\frac{1}{3}r^3\Big]_0^R = 4\pi R^3$$

(ii) Vektorfeld $\mathbf{A} = r^2\mathbf{r}$.
Linke Seite des Satzes von Gauß:

$$\int_F \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dF = \int_F dF\ R^3\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r = 4\pi R^2\ R^3 = 4\pi R^5$$

Rechte Seite:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \partial_x r^2 x + \partial_y r^2 y + \partial_z r^2 z = 2r\frac{x^2}{r} + r^2 + 2r\frac{y^2}{r} + r^2 + 2r\frac{z^2}{r} + r^2 = 2r^2 + 3r^2 = 5r^2$$

$$\curvearrowright \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\ dV = 4\pi\int_0^R dr\ 5r^4 = 20\pi\Big[\frac{1}{5}r^5\Big]_0^R = 4\pi R^5$$

(iii) Vektorfeld $\mathbf{A} = (R-r)\mathbf{r}$.
Linke Seite des Satzes von Gauß:

$$\int_F \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dF = \int_F dF\ 0 = 0$$

Rechte Seite:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \partial_x(R-r)x + \partial_y(R-r)y + \partial_z(R-r)z = 3R - \Big(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r} + 3r\Big) = 3R - 4r$$

$$\curvearrowright \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\ dV = 3R\int_v dV - 16\pi\Big[\frac{1}{4}r^4\Big]_0^R = 4\pi R^4 - 4\pi R^4 = 0$$

b) Verifizieren Sie den Satz von Stokes

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_F (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{F}$$

für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}-y^3\\ x^3\\ 0\end{pmatrix}$$

auf einer Halbkugeloberfläche, die durch $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ und $z > 0$ gegeben ist (Außenseite ist durch $x^2 + y^2 + z^2 > R^2$ definiert).
Wir beginnen mit der linken Seite. Die Randkurve ist ein Kreis in der xy-Ebene mit Radius R um den Ursprung; wir können sie mit

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos t\\ R\sin t\\ 0\end{pmatrix}$$

parametrisieren. Das Vektorfeld entlang der Randkurve ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} -R^3 \sin^3 t \\ R^3 \cos^3 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Wegelement $\mathbf{ds}$ in Richtung der Tangente an den Pfad $\mathbf{s}$ ist

$$\mathbf{ds} = \partial_t \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

Damit gilt

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} = \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -R^3 \sin^3 t \\ R^3 \cos^3 t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} dt R^4(\sin^4 t + \cos^4 t) = \frac{3\pi}{2} R^4$$

da

$$\int_0^{2\pi} dt \sin^4 t = \int_0^{2\pi} dt \cos^4 t = \frac{3\pi}{4}$$

Rechte Seite:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 + 3y^2 \end{pmatrix} = 3(x^2 + y^2)\mathbf{e}_z$$

Daher gilt in Kugelkoordinaten ($\mathbf{dF} = \mathbf{n} dF$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$), wobei wir nur über die Halbkugel integrieren:

$$\begin{aligned} \int_F (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{dF} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, R^2 \sin\vartheta 3(R^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + R^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r \\ &= 6\pi R^4 \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \sin^3\vartheta \cos\vartheta = \frac{3\pi}{2} R^4 \end{aligned}$$

da

$$\int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \sin^3\vartheta \cos\vartheta = \frac{1}{4}$$