Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Ingo Opahle / Dr. Andrea Di Ciolo

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

Blatt 9, Abgabetermin: 14.06.10, 14 Uhr (13 Punkte)

(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)

Aufgabe 1: Symmetriesierungsoperatoren (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die (Anti-)Symmetrisierungsoperatoren

$$S_{\pm} = \frac{1}{N!} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^{\pi_P} P$$

orthogonale Projektionsoperatoren im Raum der (nicht symmetrisierten) N-Teilchen-zustände sind.

b) Benutzen Sie $S_{\pm}$, um aus den (nicht-symmetrisierten) Vielteilchenwellenfunktionen

$$i)\ |2,5,3\rangle \equiv |2\rangle_1 |5\rangle_2 |3\rangle_3 \quad \text{und} \quad ii)\ |1,5,5,1\rangle \equiv |1\rangle_1 |5\rangle_2 |5\rangle_3 |1\rangle_4$$

(anti-) symmetrische Wellenfunktionen für Bosonen (Fermionen) zu konstruieren. *($|i\rangle_j$ bedeutet, dass sich das Teilchen j in dem Einteilchenzustand i befindet.)*

Aufgabe 2: Besetzungzahloperatoren (4 Punkte)

Berechnen Sie den Kommutator des nachstehenden Hamilton-Operators

$$\hat{H} = \sum_{i,j} \hat{b}_i^\dagger \langle i|\hat{T}|j\rangle \hat{b}_j + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger \langle ij|V|kl\rangle \hat{b}_k \hat{b}_l$$

mit dem Teilchenzahloperator

$$\hat{N} = \sum_i \hat{n}_i = \sum_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i,$$

wobei $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ der Besetzungszahloperator für bosonische Erzeuger und Vernichter $\hat{b}_i^\dagger$ und $\hat{b}_i$ ist. Berechnen Sie dazu die Kommutatoren $[\hat{n}_i, \hat{b}_j^\dagger]$, $[\hat{N}, \hat{b}_j^\dagger]$, $[\hat{n}_i, \hat{n}_j]$, $[\hat{n}_j, \hat{N}]$, $[\hat{n}_i, \hat{b}_j]$ und $[\hat{N}, \hat{b}_j]$. Welche Aussage über N können Sie aufgrund ihrer Rechnung machen? Gilt diese Aussage allgemein für beliebige $\hat{H}$?

Aufgabe 3: Zweite Quantisierung, diamagnetischer Störterm (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Matrixelemente eines linearen Operators $\hat{A}$ unabhängig davon sind, ob sie in der ersten oder zweiten Qunatisierung dargestellt werden, d.h.

$$\int d^3r \, \langle\phi|\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{A}\hat{\psi}(\vec{r})|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{A}|\phi\rangle,$$

wobei die Feldoperatoren durch

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{c}_{\vec{k}}$$

definiert sind und die $\hat{c}_{\vec{k}}$'s die fermionischen Anti-Vertauschungsrelationen erfüllen.

b) Bestimmen Sie die Form des diamagnetischen Störterms

$$\hat{H}_{dm} = \frac{e^2}{2mc^2}\left(\hat{\vec{A}}(\vec{r},t)\right)^2 \text{ mit } \hat{\vec{A}}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{q}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\vec{q}}}}\left(\hat{a}_{\vec{q}}\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{q}}t)} + \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}\, e^{-i(\vec{q}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{q}}t)}\right)\vec{u}_{\vec{q}}$$

in der zweiten Quantisierung durch explizites Berechnen von

$$\hat{H}_{WW} = \int d^3r \; \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{H}_{dm}\hat{\psi}(\vec{r}).$$

Zeichnen Sie die Feynman-Diagramme der einzelnen Terme. Wie ändern sich die Diagramme, wenn man annimmt, dass die beiden beteiligten Photonen identisch polarisiert sind?