Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Ingo Opahle / Dr. Andrea Di Ciolo

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

Blatt 8, Abgabetermin: 07.06.10, 14 Uhr (15 Punkte)

(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)

Aufgabe 1: Nicht-kommutierende Limites (2 Punkte)

Betrachen Sie die Funktionen

$$f_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a-1} \quad ; \quad g_a(x) = \frac{a-1}{a^2+x^2} \qquad a, x \in \mathbb{R}$$

Beweisen Sie

$$\lim_{a\to 0} f_a(x)\cdot g_a(x) \neq \left(\lim_{a\to 0} f_a(x)\right)\cdot\left(\lim_{a\to 0} g_a(x)\right)$$

Diskutieren Sie, warum das Produkt der Limites nicht gleich dem Limes des Produkts ist!

Aufgabe 2: Spin-Statistik-Theorem (4.5 = 2 + 2.5 Punkte)

a) Benutzen Sie $[a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k'}}] = \delta_{\vec{k},\vec{k'}}$, um den Kommutator $[E_x(\vec{r}, t=0), E_y(\vec{r'}, t=0)]$ für das elektrische Feld $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ zu berechnen.

b) Nun nehmen wir an, das Spin-Statistik-Theorem sei falsch. Berechnen Sie nochmal den Kommutator $[E_x(\vec{r}, t=0), E_y(\vec{r'}, t=0)]$, aber benutzen Sie die Fermi-Antivertauschungsrelationen $\{a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k'}}\} = \delta_{\vec{k},\vec{k'}}$ für Photonen!

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Für die Diskussion betrachten Sie allgemein $[E_i(\vec{r}, t), E_j(\vec{r'}, t')]$.
Das Kausalitätsprinzip der Relativitätstheorie verlangt, dass dieser Kommutator für gewisse $(\vec{r} - \vec{r'}), (t - t')$ verschwindet. Für welche?

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Bose-Operatoren in 2. Quantisierung (2.5 Punkte)

Wir betrachten die Operatoren $b_\alpha^\dagger$ und b_α, für welche folgende Vertauschungsrelationen gelten:

$$[b_\alpha, b_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} \quad ; \quad [b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger] = 0 \quad ; \quad [b_\alpha, b_\beta] = 0.$$

Es sei $|0\rangle$ ein Grundzustand auf dem passenden Fock-Raum, sodass $b_\alpha|0\rangle = 0$.
Zeigen Sie

$$n_\alpha (b_\alpha^\dagger)^N |0\rangle = N (b_\alpha^\dagger)^N |0\rangle,$$

wobei $n_\alpha = b_\alpha^\dagger b_\alpha$ der Teilchenzahloperator und N die Teilchenanzahl ist.

Aufgabe 4: Fermi-Operatoren: Bogoliubov-Transformation (6 = 2 + 1.5 + 0.5 + 2 Punkte)

Nutzen Sie die Bogoliubov-Transformation und diagonalisieren Sie die Fermi-Hamiltonoperatoren:

$$H = E_1 \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} c_\sigma^\dagger c_\sigma + E_2 (c_\uparrow^\dagger c_\downarrow^\dagger + c_\downarrow c_\uparrow),$$

wobei $c_\sigma^\dagger$ und c_σ die Fermi-Antivertauschungsrelationen erfüllen.
Die Bogolubov-Transformation ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} c_\uparrow^\dagger \\ c_\downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_\uparrow^\dagger \\ d_\downarrow \end{pmatrix}.$$

a) Verifizieren Sie, dass die neuen Operatoren $d_\sigma^\dagger$ und d_σ der Fermi-Statistik tatsächlich gehorchen.

b) Schreiben Sie den Operator H mit den neuen Operatoren $d_\sigma^\dagger$ und d_σ um.

c) Fordern Sie das Verschwinden der Nebendiagonalelemente.

d) Berechnen Sie die Diagonalelemente.