Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Ingo Opahle / Dr. Andrea Di Ciolo

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

Blatt 7, Abgabetermin: 31.05.10, 14 Uhr (11 Punkte)

(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)

Aufgabe 1: Kohärente Zustände (6 = 1 + 2.5 + 1 + 1.5 Punkte)

Kohärente Zustände $|c\rangle$ können durch

$$|c\rangle = D(c)|0\rangle$$

beschrieben werden, wobei $|0\rangle$ das Vakuum ist und

$$D(c) = e^{(ca^\dagger - c^* a)}$$

mit $c \in \mathbb{C}$.

a) Warum ist $D(c)$ ein Verschiebungsoperator? Berechnen Sie $D^{-1}(c)aD(c)$.

b) Zeigen Sie, dass $|c\rangle$ im Fockraum die Darstellung

$$|c\rangle = e^{-\frac{|c|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

hat.

c) Zeigen Sie, dass diese Zustände normiert sind, d.h. $\langle c|c\rangle = 1$.

d) Zeigen Sie, dass diese Zustände ein vollständiges System bilden, d.h.

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{dc}{\pi} |c\rangle\langle c| = \mathbb{I}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 2: Atom im Strahlungsfeld (5 = 2 + 3 Punkte)

Wir können die Wechselwirkung eines Atoms (am Platz $\vec{r}_0 = 0$) mit mehreren Feldmoden mit Wellenvektoren $\vec{k}$ durch den folgenden Hamiltonoperator H beschreiben:

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + H_1 \qquad mit \\
H_0 &= \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} - \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z; \\
H_1 &= \sum_{\vec{k}} \hbar g_{\vec{k}} (\sigma_+ a_{\vec{k}} + a^\dagger_{\vec{k}} \sigma_-)
\end{aligned}$$

wobei $g_{\vec{k}}$ reell ist.

a) Schreiben Sie den Operator H_1 im Wechselwirkungsbild bezüglich H_0, d.h. berechnen Sie $e^{iH_0t/\hbar} H_1 e^{-iH_0t/\hbar}$.

b) Berechnen Sie unter Verwendung von Fermi's Goldene Regel die Übergangsraten $\Gamma_{(e,n)\to(g,n')}$ sowie $\Gamma_{(g,n)\to(e,n')}$. n und n' symbolysieren hier die Verteilung der Photonenzahlen auf die Moden: $n \equiv \{n_{\vec{k}}\}$ und $n' \equiv \{n'_{\vec{k}}\}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.