Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Ingo Opahle / Dr. Andrea Di Ciolo

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

Blatt 5, Abgabetermin: 17.05.10, 14 Uhr (15 Punkte)

(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)

Aufgabe 1: Zeitumkehroperator im Impulsraum (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Wirkung des Zeitumkehroperators $\hat{U}(\Theta)$ auf eine Spinorwellenfunktion im Impulsraum

$$\tilde{\Psi}(\vec{p},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int d^3x \; e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{x}} \; \tilde{\Psi}(\vec{x},t) \quad \text{mit} \quad \tilde{\Psi}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \Psi_+(\vec{x},t) \\ \Psi_-(\vec{x},t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Zeitabhängige Kraft auf harmonischen Oszillator (1+3+1=5 Punkte)

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator befinde sich für $t < 0$ in seinem Grundzustand. Für $t \geq 0$ wirke eine zeitabhängige *Kraft* der Form

$$F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$$

auf den Oszillator.

a) Stellen Sie den Hamiltionoperator in der Form $H = H_0 + V(t)$ dar.

b) Bestimmen Sie in 1. Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Oszillator zur einer Zeit $t > 0$ in seinem ersten Anregungszustand befindet.

c) Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit für $t \to \infty$ zeitunabhängig ist. Gibt es eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Oszillator in einem höheren Anregungszustand befindet?

Hinweis: Es gilt

$$\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}).$$

Aufgabe 3: Photoelektrischer Effekt (3.5+3.5=7 Punkte)

Betrachten Sie die Wechselwirkung eines Wasserstoffatoms im Grundzustand

$$\langle \vec{r}|0\rangle = \frac{e^{-r/a_0}}{\sqrt{\pi a_0^3}}$$

mit einem klassischen, monochromatischen Strahlungsfeld mit Polarisationsvektor $\hat{\epsilon} = \hat{z}$. In elektrischer Dipolnäherung ist die Übergangswahrscheinlichkeit $w_{0\to f}$ vom Grundzustand $|0\rangle$ in den Endzustand $|f\rangle$ für den Absorptionsprozeß proportional zu

$$w_{0\to f} \propto \left| \langle 0|\frac{\partial}{\partial z}|f\rangle \right|^2 \; \delta(E_f - E_0 - \hbar\omega).$$

a) Leiten Sie diesen Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit in 1. Ordnung Störungstheorie ab. Gehen Sie dazu von dem Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1(t)$ mit

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad \text{und} \quad H_1 = -\frac{e}{2mc}\left(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}\right) + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2 \approx -\frac{e}{2mc}\left(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}\right)$$

aus, wobei $\vec{A}(\vec{x},t)$ durch

$$\vec{A}(\vec{x},t) = 2A_0\hat{\epsilon}\cos\left(\frac{\omega}{c}\hat{n}\cdot\vec{x} - \omega t\right)$$

gegeben ist. Verwenden Sie die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ und gehen Sie davon aus, dass die Wellenlänge des eingestrahlten Lichts sehr viel größer als die atomare Ausdehnung ist.

b) Für hinreichend große Energien können die Endzustände $|f\rangle$ durch ebene Wellen

$$\langle \vec{r}|f\rangle = \frac{e^{i\vec{p}_f\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

genähert werden. Bestimmen Sie unter Verwendung des oben angegeben Ausdrucks die Übergangswahrscheinlichkeit in einen Endzustand $|f\rangle$. Wie hängt diese von der Richtung des ausgehenden Elektrons ab?