Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Ingo Opahle / Dr. Andrea Di Ciolo

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

Blatt 4, Abgabetermin: 10.05.10, 14 Uhr (14 Punkte)

(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)

Aufgabe 1: Rotationsinvarianz von Zweispinzuständen (5 = 3 + 2 Punkte)

Betrachten Sie zwei Spin-1/2 Teilchen ($i = 1, 2$), die sich in einem Spin-Singulett Zustand

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle)$$

bezüglich der z-Achse befinden.

a) Zeigen Sie, dass der Spin-Singulett Zustand rotationsinvariant bezüglich der Wahl der gemeinsamen Quantisierungsachse der beiden Spins ist. Wählen Sie dazu eine Basis mit eine rotierten Quantisierungsachse und entwickeln Sie den Singulett-Zustand bzgl. der neuen Basisvektoren.

b) Zeigen Sie, dass der Spin-Triplett Zustand mit $m = 0$

$$|T_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle)$$

nicht rotationsinvariant ist.

Aufgabe 2: Allgemeine Drehungen (6 Punkte)

Leiten Sie die in der Vorlesung gegebene allgemeine Transformationsvorschrift

$$U_S(\vec{n},\phi)\vec{\sigma}U_S^\dagger(\vec{n},\phi) = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) - \vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\sigma})\cos\phi + \vec{n}\times\vec{\sigma}\sin\phi$$

mit $U_s = e^{i\vec{n}\cdot\tilde{\mathbf{S}}\phi/\hbar}$ ab, wobei ϕ der Drehwinkel einer Drehung um die Achse $\vec{n}$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Translationsoperator (3 = 2 + 1 Punkte)

a) Berechnen Sie den Kommutator $[\mathbf{x}, \mathbf{U}(\mathbf{a})]$ mit $\mathbf{U}(\mathbf{a}) = exp\left(\frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}{\hbar}\right)$, wobei $\mathbf{x}$ der Ortsoperator ist.

   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $[\mathbf{x}, \mathbf{p}^n]$ *für* $n \in \mathcal{N}$ *durch Induktion.*

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{U}(\mathbf{a})|\mathbf{x}'\rangle$ wieder ein Eigenzustand des Ortsoperators ist. Was ist der dazugehörige Eigenwert?