

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

Blatt 3, Abgabetermin: 03.05.10, 14 Uhr (13 Punkte)

(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)

Aufgabe 1: Unschärferelationen (2 Punkte)

Ein Teilchen mit Ladung q und Masse m befinde sich in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Der Operator der Teilchengeschwindigkeit ist durch

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \quad \text{mit dem Vektorpotential} \quad \vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r})$$

gegeben. Bestimmen Sie den Kommutator $[v_i, v_j]$ sowie die Unschärferelation $\Delta v_i \Delta v_j$.

Aufgabe 2: Störungstheorie (2+4=6 Punkte)

Betrachten Sie ein System im Raum der drei normierten Zustände

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{und} \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Hamiltonoperator des Systems sei durch

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad \text{mit} \quad \hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & \delta \\ \epsilon & \delta & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben (δ und ϵ reell und klein).

- Es gelte zunächst $E_1 < E_2 < E_3$. Bestimmen Sie die Energieverschiebung aufgrund des Störterms \hat{H}_1 in zweiter Ordnung Störungstheorie.
- Die Eigenzustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ des ungestörten Hamiltonoperators \hat{H}_0 seien nun entartet, es gelte $E_1 = E_2 < E_3$. Bestimmen Sie die Energieverschiebung durch die Störung \hat{H}_1 : *i*) durch Diagonalisierung der Hamiltonmatrix und *ii*) in 2. Ordnung (entarteter) Störungstheorie. Vergleichen Sie die Ergebnisse untereinander sowie mit dem Resultat, das man durch naives Einsetzen der Energien in das Ergebnis von Teil a) erhält.

Aufgabe 3: Wasserstoffatom im elektrischen Feld (5 Punkte)

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem konstanten elektrischen Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z$. Der Hamiltonoperator des Elektrons sei durch

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad \text{mit} \quad \hat{H}_1 = -eEz$$

gegeben, wobei \hat{H}_0 der Hamiltonoperator des ungestörten Wasserstoffatoms ist (relativistische Korrekturen seien vernachlässigbar). Bestimmen Sie die Energiekorrekturen für die beiden niedrigsten Energieniveaus des Wasserstoffatoms aufgrund des elektrischen Feldes mittels Störungstheorie.

(Hinweis: Die im Labor erreichbaren Felder können als klein betrachtet werden; für die Aufgabe genügt es, wenn Zustände bis zur Hauptquantenzahl $n = 2$ in der Störungsrechnung berücksichtigt werden.)