Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Ingo Opahle / Dr. Andrea Di Ciolo

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

Blatt 2, Abgabetermin: 26.04.10, 14 Uhr (10 Punkte)

(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)

Aufgabe 1: Linearer Operator (2=0.5+1.5 Punkte)

In einem zweidimensionalen komplexen Hilbertraum sei ein linearer Operator $\mathbf{A}$ durch seine Wirkung auf die Vektoren einer orthonormierten Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ folgendermaßen definiert: $\mathbf{A}|e_1\rangle = -|e_2\rangle \quad ; \quad \mathbf{A}|e_2\rangle = |e_1\rangle$.

a) Schreiben Sie den Operator $\mathbf{A}$ als Linearkombination von Ket-Bra-Ausdrücken $|e_j\rangle\langle e_k|$, $j, k = 1, 2$ an.

b) Ist $\mathbf{A}$ ein Normaloperator? Ist $\mathbf{A}$ selbstadjungiert? Ist $\mathbf{A}$ unitär? Ist $\mathbf{A}$ idempotent? Existiert $\mathbf{A}^{-1}$?

   Hinweis: Ein beschränkter Operator heißt Normaloperator, wenn er mit seinem Adjungierten vertauscht.

Aufgabe 2: Spektraldarstellung (2 Punkte)

Jeder hermitescher Operator $\mathbf{A}$ kann in der folgenden Spektraldarstellung geschrieben werden: $\mathbf{A} = \sum_j a_j \mathbf{P}_j$. Dabei sind a_j die Eigenwerte des Operators $\mathbf{A}$ und $\mathbf{P}_j$ die Projektoren auf die dazugehörigen Unterräume.
Wie lautet die spektrale Zerlegung für den folgenden Operator $\mathbf{A}$?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 3 & 0 \\ i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Messprozess an zwei Spins (3=2+1 Punkte)

Betrachten Sie ein System von Spin-1/2-Teilchen ($i = 1, 2$) mit den 4 Basiszuständen $|+,+\rangle$, $|+,-\rangle$, $|-,+\rangle$ und $|-,-\rangle$, die die gemeinsamen Eigenzustände von $\mathbf{S}_{1z}$ und $\mathbf{S}_{2z}$ bezeichnen. Das System sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+,+\rangle + \frac{1}{2}|+,-\rangle + \frac{1}{2}|-,-\rangle.$$

a) Zur Zeit $t = 0$ werde $\mathbf{S}_{1z}$ gemessen. Was ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert $-\hbar/2$ zu erhalten? Was ist der Zustand nach der Messung? Wenn danach $\mathbf{S}_{1x}$ gemessen wird, welche Ergebnisse sind möglich und mit welchen Wahrscheinlichkeiten?

b) Wenn gleichzeitig $\mathbf{S}_{1z}$ und $\mathbf{S}_{2z}$ gemessen werden, was ist die Wahrscheinlichkeit entgegengesetzte bzw. gleiche Werte zu finden?

Aufgabe 4: Unschärferelation (3 Punkte)

Betrachten Sie die allgemeine Unschärferelation $\langle(\Delta\mathbf{A})^2\rangle\langle(\Delta\mathbf{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\mathbf{A},\mathbf{B}]\rangle|^2$
mit $\langle(\Delta\mathbf{A})^2\rangle = \langle\mathbf{A}^2\rangle - \langle\mathbf{A}\rangle^2$ und ebenso für den Operator $\mathbf{B}$.
$\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind hier beliebige Observable und die Ungleichung gilt für jeden beliebigen Quantenzustand.
Wir wählen nun $\mathbf{A} = \sigma_x$ und $\mathbf{B} = \sigma_y$ mit den Pauli-Matrizen. Konstruieren Sie explizit die Zustände, für die das Produkt der Unschärfen $\langle(\Delta\mathbf{A})^2\rangle\langle(\Delta\mathbf{B})^2\rangle$ maximal bzw. minimal wird.