Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Ingo Opahle / Dr. Andrea Di Ciolo

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

Blatt 13 (Probeklausur), Abgabetermin: 12.07.10, 14 Uhr (14 Punkte)

(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)

Aufgabe 1: Zusammengesetzte Operatoren (2 Punkte)

Gegeben sind lineare Operatoren, die die Vertauschungsrelation von Erzeugungs- und Vernichtungsoperator des harmonischen Oszillators erfüllen, $[b, b^\dagger] = 1$. Daraus werden die folgenden Operatoren konstruiert:

$$D_+ = \hbar(1 - b^\dagger b)b, \quad D_- = \hbar b^\dagger, \quad D_3 = \hbar(\frac{1}{2} - b^\dagger b)$$

a) Drücken Sie die Operatoren D_3, D_+D_- und D_-D_+ durch den Anzahloperator $n = b^\dagger b$ aus.

b) Drücken Sie unter Verwendung von a) den Operator

$$\frac{1}{2}(D_+D_- + D_-D_+) + (D_3)^2$$

durch n aus, und zeigen Sie, daß er eine Konstante ergibt.

Aufgabe 2: Entartete Störungstheorie (3 Punkte)

Betrachten Sie den Hamiltonoperator

$$H = H_0 + H_1 \text{ mit } H_0 = AS^2 \text{ und } H_1 = B(S_x^2 - S_y^2)$$

für ein System mit Spin $s = 1$ Teilchen.

a) Bestimmen Sie die Eigenzustände und die dazugehörigen Energieeigenwerte des ungestörten Hamiltonoperators H_0.

b) Berechnen Sie die Änderung der Energieeigenwerte aufgrund von H_1 in 1. Ordnung Störungstheorie. Was sind die dazugehörigen Eigenzustände 0. Ordnung von H?

Hinweis: Es gilt

$$S_\pm = S_x \pm iS_y \quad \textit{und} \quad S_\pm|s,m\rangle = \hbar\sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)}|s, m \pm 1\rangle.$$

Aufgabe 3: Variationsansatz für Li^+-Ion (5 Punkte)

Das Li^+-Ion hat die Kernladungszahl $Z = 3$ und die Elektronenkonfiguration $1s^2$.

a) Wie lautet der (nicht-relativistische) Hamiltonoperator und welche Bedeutung haben die einzelnen Terme, die darin auftreten?

b) Verwenden Sie für die Wellenfunktion den Ansatz

$$\Psi_\lambda(\vec{r}_1, s_1, \vec{r}_2, s_2) = \phi_\lambda(\vec{r}_1)\phi_\lambda(\vec{r}_2)|0,0\rangle \quad \text{mit} \quad |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle]$$

und schreiben Sie die Matrixelemente mit den einzelnen Termen des Hamiltonians auf. Vereinfachen Sie diese so weit moeglich!

c) Verwenden Sie nun für $\phi_\lambda(\vec{r})$ den Variationsansatz

$$\phi_\lambda(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\pi a_0^3}} e^{-\frac{\lambda r}{a_0}} \quad (a_0: \text{ Bohrradius; } \lambda: \text{ variationeller Parameter})$$

und schätzen Sie damit die Grundzustandsenergie des Li^+-Ions ab.

Hinweise: Die Grundzustandsenergie eines wasserstoffartigen Atoms mit Kernladungszahl Z ist durch $E = -\frac{1}{2}mc^2(Z\alpha)^2$ gegeben, weiter gilt:

$$\int d^3x \int d^3y \, |\phi_\lambda(\vec{x})|^2 \frac{e}{|\vec{x} - \vec{y}|} |\phi_\lambda(\vec{y})|^2 = \frac{5}{8} mc^2 \alpha^2 \lambda$$

Aufgabe 4: Dirac-Gleichung für masseloses Teilchen (4 Punkte)

Lösen Sie die Dirac-Gleichung für ein masseloses Teilchen

$$i\hbar\partial_t\Psi = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}\, \Psi.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Machen Sie für die Wellenfunktion den Ansatz

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\phi, \chi \text{ Spinoren})$$

und schreiben Sie die ursprüngliche Gleichung in der Form eines Systems um.

b) Lösen Sie dieses Gleichungssystem durch den ebene Wellen-Ansatz

$$\Psi = \Psi_0(p) \exp(-ip_\mu x^\mu) \text{ mit } \Psi_0(p) = N \begin{pmatrix} \phi_0(p) \\ \chi_0(p) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Spektrum des Hamilton-Operators und seine Eigenvektoren zu positiven und negativen Energien.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert des Helizitätsoperators $\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$ in diesen Zuständen.