Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Ingo Opahle / Dr. Andrea Di Ciolo

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

# Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

## Blatt 12, Abgabetermin: 05.07.10, 14 Uhr (14 Punkte)

*(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)*

**Aufgabe 1: Relativistisches Wasserstoffatom (7 Punkte)**

Im letzten Übungsblatt wurden die gekoppelten radialen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} g'_{n\kappa}(r) &= -\frac{\kappa+1}{r}g_{n\kappa} + \frac{1}{c}(mc^2 - V(r) + E_{n\kappa})f_{n\kappa}(r) \\ f'_{n\kappa}(r) &= \frac{\kappa-1}{r}f_{n\kappa}(r) + \frac{1}{c}(mc^2 + V(r) - E_{n\kappa})g_{n\kappa}(r) \end{aligned}$$

für ein Elektron im Zentralpotential abgeleitet ($\hbar = 1$ gesetzt). Lösen Sie diese für ein wasserstoffähnliches Einelektronenatom mit Kernladungszahl $Z$:

a) Setzen Sie $G(r) = rg(r)$ und $F(r) = rf(r)$ und leiten Sie die entsprechenden Differentialgleichungen für $G(r)$ und $F(r)$ ab.

b) Verwenden Sie den Ansatz

$$F(r) = e^{-ar}r^s\sum_{n=0} a_n r^n; \quad G(r) = e^{-ar}r^s\sum_{n=0} b_n r^n; \quad \text{mit } a = \frac{\sqrt{(mc^2 + E_{n\kappa})(mc^2 - E_{n\kappa})}}{c}$$

und leiten Sie damit eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $a_n$ und $b_n$ ab.

c) Die Reihe muss abbrechen, damit die Wellenfunktionen normierbar sind. Bestimmen Sie den Wert von $s$ und bestimmen Sie unter Verwendung der Abbruchbedingungen die Energieeigenwerte $E_{n\kappa}$.

**Aufgabe 2: Feinstruktur (3 Punkte)**

Unter Vernachlässigung relativistischer Effekte läßt sich ein wasserstoffähnliches Atom mit einem Elektron außerhalb der geschlossenen Schalen durch den Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r).$$

beschreiben. Aufgrund der sphärischen Symmetrie des Hamiltonians sind alle Zustände mit den gleichen $(n, l)$ Quantenzahlen entartet. Die Spin-Bahn-Kopplung führt zu einer Aufspaltung der Energien dieser Zustände, der sogenannten Feinstruktur. Unter Einbeziehung der Spin-Bahn-Kopplung lautet der Hamiltonoperator

$$H = H_0 + H_{\text{ls}} \text{ with } H_{\text{ls}} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\vec{S}.$$

a) Der ungestörte Hamiltonoperator $H_0$ kommutiert mit den beiden Operatorsätzen (i) $L^2$, $L_z$, $S^2$, $S_z$ und (ii) $L^2$, $S^2$, $J^2$, $J_z$ und man kann einen der beiden Sätze als Basis für die Eigenzustände von $H_0$ wählen. Warum ist es günstiger unter Einbeziehung der Spin-Bahn-Kopplung mit der Darstellung (ii) zu arbeiten? Berechnen Sie die Kommutatoren der Operatoren aus Satz (i) und (ii) mit dem $\vec{L}\vec{S}$-Term in $H_{\text{ls}}$.

b) K (Kalium) hat im Grundzustand die Elektronenkonfiguration [Ar] $4s^1$, mit einem Elektron im 4s Zustand. Die angeregten 4p-Zustände spalten aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung in $4p_{j=1/2}$- und $4p_{j=3/2}$-Zustände auf. Bestimmen Sie die Feinstrukturaufspaltung zwischen den $4p_{j=1/2}$- und $4p_{j=3/2}$-Niveaus in erster Ordnung Störungstheorie. Welches der 4p-Niveaus hat die niedrigere Energie, wie lautet die Entartung?

c) Die nächsten angeregten Zustände von Kalium sind die 3d und 5s Niveaus. Erwarten Sie eine Aufspaltung dieser Niveaus? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 3: Aufspaltung im Magnetfeld (4 Punkte)**

a) Der Hamiltonoperator für ein wasserstoffähnliches Atom in einem externen Magnetfeld $\vec{B}$ ist durch (7.63 im Skript)

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{Ze^2}{r} + H_{ls} - \frac{g_s e}{2mc}\vec{S}\cdot\vec{B}$$

gegeben. Es sei $\vec{B} = B\vec{e}_z$ konstant. Führen Sie $H$ auf die Form

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{2mc}\vec{B}\cdot\left(\vec{L} + g_s\vec{S}\right) + H_{ls}$$

zurück (quadratische Terme in $\vec{A}$ seien vernachlässigbar).

b) Bestimmen Sie die Aufspaltung der 4s- und 4p-Zustände des Kaliumatoms (siehe Aufgabe 2) i) in einem schwachen Magnetfeld und ii) in einem starken Magnetfeld.