Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Ingo Opahle / Dr. Andrea Di Ciolo

GOETHE UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

Blatt 11, Abgabetermin: 28.06.10, 14 Uhr (15 Punkte)

(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)

Aufgabe 1: Energieprojektionsoperatoren (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{c\alpha\vec{p} + \beta mc^2}{\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}}\right)$$

aus einer beliebigen Linearkombination der Lösungen der Dirac-Gleichung für freie Teilchen die Anteile mit positiver bzw. negativer Energie herausprojezieren.

Aufgabe 2: γ-Matrizen (3 Punkte)

Zusätzlich zu den im 10. Übungsblatt eingeführten γ-Matrizen $\gamma^0 = \beta$ und $\gamma^i = \beta\alpha^i$ $(i = 1\ldots 3)$ verwendet man häufig noch eine fünfte Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, welche mit allen γ^μ vertauscht. Wir definieren die Matrizen Γ_i $(i = 1\ldots 16)$ durch

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \mathbb{1} \\
\Gamma_{2\ldots 5} &= \gamma^\mu, \mu = 0\ldots 3 \\
\Gamma_{6\ldots 11} &= \gamma^\mu\gamma^\nu \text{ für } \mu < \nu \\
\Gamma_{12} &= \gamma^5 \\
\Gamma_{13\ldots 16} &= \gamma^\mu\gamma^5, \mu = 0\ldots 3
\end{aligned}$$

Die Matrix Γ_1 vertauscht als einzige mit allen anderen Matrizen, jede der übrigen Matrizen vertauscht mit 8 und antivertauscht mit 8 Matrizen. Weiter gilt $\Gamma_n^2 = \mathbb{1}$

a) Berechnen Sie die Spur und die Determinante dieser Matrizen.

b) Zeigen Sie, dass diese Matrizen linear unabhängig sind.

Aufgabe 3: Radiale Dirac-Gleichung (9 Punkte)

Die (zeitunabhängige) Dirac-Gleichung für ein Elektron im Zentralpotential lautet

$$H\psi(\vec{r}) = \left[c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2 + V(r)\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}).$$

a) Leiten Sie die zeitunabhängige Dirac-Gleichung durch einen geeigneten Separationsansatz aus der zeitabhängigen Dirac-Gleichung

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V(r)\right]\Psi(\vec{r},t) = \left[c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right]\Psi(\vec{r},t)$$

ab.

b) Wir definieren den Spin-Bahn-Operator K und den Gesamtdrehimpulsoperator $\vec{J}$ durch

$$K = \beta\left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + \hbar\right); \quad \vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \text{ mit } \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

wobei σ_i die Pauli-Matrizen sind. Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator H mit den Operatoren J_z, J^2 und K vertauscht.

c) Zeigen Sie, die Vierer-Spinoren

$$\psi_{n\kappa\mu}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g_{n\kappa}(r)\,\chi_{\kappa\mu}(\hat{r}) \\ if_{n\kappa}(r)\,\chi_{-\kappa\mu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \text{ mit } \chi_{\kappa\mu}(\hat{r}) = \Omega_{jl_\kappa\mu}(\hat{r}) = \begin{pmatrix} c_{\kappa\mu\uparrow}\mathcal{Y}_{l_\kappa\mu-\frac{1}{2}}(\hat{r}) \\ c_{\kappa\mu\downarrow}\mathcal{Y}_{l_\kappa\mu+\frac{1}{2}}(\hat{r}) \end{pmatrix}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} c_{\kappa\mu\uparrow} &= \sqrt{\tfrac{j+\mu}{2j}} \\ c_{\kappa\mu\downarrow} &= \sqrt{\tfrac{j-\mu}{2j}} \end{aligned}\right\} \text{ für } j = l_\kappa + \frac{1}{2}; \qquad \left.\begin{aligned} c_{\kappa\mu\uparrow} &= -\sqrt{\tfrac{j-\mu+1}{2j+2}} \\ c_{\kappa\mu\downarrow} &= \sqrt{\tfrac{j+\mu+1}{2j+2}} \end{aligned}\right\} \text{ für } j = l_\kappa - \frac{1}{2}$$

und

$$l_\kappa = \begin{cases} \kappa & \kappa > 0 \\ -\kappa - 1 & \kappa < 0 \end{cases}$$

Eigenzustände von J^2, J_z und K sind.

d) Einsetzen des Ansatzes $\psi_{\rho\kappa\mu}(\vec{r})$ in die Dirac-Gleichung für ein Elektron im Zentralpotential führt auf ein System von zwei gekoppelten Differntialgleichung für die Radialfunktionen der großen und kleinen Komponente $g_{n\kappa}(r)$ und $f_{n\kappa}(r)$, der sogenannten radialen Dirac-Gleichung. Leiten Sie diese ab!