Prof. Dr. Claudius Gros
Dr. Ingo Opahle / Dr. Andrea Di Ciolo

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik 2

Sommersemester 2010

Blatt 10, Abgabetermin: 21.06.10, 14 Uhr (14 Punkte)

(Abgabe im Briefkasten vor dem Sekretariat, Phys 01.132)

Aufgabe 1: Feldstärketensor (3.5 = 2+0.75+0.75 Punkte)

a) Drücken Sie die Größen $a = \vec{E} \cdot \vec{B}$ und $b = \vec{B}^2 - \vec{E}^2$ durch die Komponenten von

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

aus, wobei $\vec{E}$ ($\vec{B}$) das elektrische (magnetische) Feld ist.

Hinweis: Sie benötigen auch den Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.

b) Wie transformieren sich a und b unter einer Lorentz-Transformation?

c) Zeigen Sie, falls es in einem bestimmten Inertialsystem konstante Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gibt, die nicht senkrecht aufeinander stehen, so gibt es kein Intertialsystem, in dem eines der beiden Felder verschwindet.

Aufgabe 2: Klein-Gordon Gleichung (6 = 2.5 + 1 + 2.5 Punkte)

Die allgemeine Form der Klein-Gordon-Gleichung für ein freies Feld ist durch

$$[\Box + (mc)^2]\Psi(\vec{x}, t) = 0 \tag{1}$$

gegeben. $[\hbar = 1]$

a) Führen sie Gl. (1) durch die Transformation

$$\Psi = \phi + \chi \quad ; \quad i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = mc^2(\phi - \chi)$$

Bitte wenden!

über in das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{1}{2m}\Delta\Psi + mc^2\phi \\ i\frac{\partial \chi}{\partial t} &= +\frac{1}{2m}\Delta\Psi - mc^2\chi. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass der Spaltenvektor $\Phi = \begin{pmatrix}\phi \\ \chi\end{pmatrix}$ der Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = H\Phi,$$

genügt. Drücken Sie den Hamiltonian H durch die Pauli-Matrizen aus. Was ergibt H^2? Ist H hermitesch?

c) Lösen Sie die Schrödingergleichung durch den Ansatz

$$\Phi = A\begin{pmatrix}\phi_0 \\ \chi_0\end{pmatrix} exp[-ip_\mu x^\mu].$$

Beachten Sie, dass die Normierungsbedingung von Φ durch

$$||\Phi|| = \int d^3x\Phi^*\sigma_3\Phi$$

gegeben ist, wobei σ_3 eine der Pauli-Matrizen ist. Welche Energie-Impuls-Beziehung finden Sie? Geben Sie explizit die Lösung für positive bzw. negative Energie an.

Aufgabe 3: Dirac Matrizen (4.5 = 2.5 + 2 Punkte)

In der Vorlesung sind die Dirac-Matrizen

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

eingeführt worden.

a) Zeigen Sie, dass diese Matrizen die algebraischen Relationen

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\mathbb{I} \quad ; \quad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \quad ; \quad (\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1$$

erfüllen.

b) Betrachten Sie nun $\gamma^0 = \beta$ und $\gamma^i = \beta\alpha^i$: Zeigen Sie, dass daraus die Darstellung

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

folgt, sowie die Relation

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$